

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta  
Katedra numerické matematiky

# Numerické řešení úloh stochastické mechaniky

Doktorská disertační práce

**Cyril Fischer**

Školitel: Ing. Jiří Náprstek DrSc.



Akademie věd České republiky  
Ústav teoretické a aplikované mechaniky

Praha, červen 2002



## Předmluva

Tato práce je výsledkem mého externího doktorandského studia na katedře Numerické matematiky Matematicko-fyzikální fakulty. Je věnována problémům spojeným s analýzou seizmogramů a jejich adaptací pro použití v metodách stochastické mechaniky. Toto téma, které je součástí dlouhodobého projektu řešeného mým školícím pracovištěm, nachází uplatnění při studiu chování stavebních konstrukcí zatěžovaných náhodným zatížením, v oblasti seismického inženýrství, při návrhu seizmicky odolných staveb a jistě i v jiných oblastech lidské činnosti.

Rád bych touto cestou poděkoval svému školiteli, kterým byl Ing. Jiří Náprstek DrSc. za odborné vedení, za poskytnutí cenných rad, za podporu a porozumění při řešení úkolů.

Můj dík rovněž patří kolegům v Ústavu teoretické a aplikované mechaniky i Matematicko-fyzikální fakulty, zvláště pak milým pánům profesorům M. Pirnerovi, O. Fischerovi a L. Frýbovi, kteří mi často pomáhali s řešením čtených problémů.

Děkuji rovněž oponentům, doc. RNDr. Z. Práškové CSc. a Ing. L. Pečínkovi CSc. za připomínky, které jsem včlenil do tohoto mírně opraveného výtisku.

A sic nakonec leč přede všemi děkuji své manželce Kateřině za trpělivost a podporu, bez níž bych tuto práci těžko dokončil.

**Poděkování** Práce vznikla v souvislosti a s podporou řady grantových projektů. V posledních letech to byly zejména granty GA AV ČR A207 10 02, A207 11 03, A207 10 02/00, GA ČR 103/01/0243, 103/99/0122, 103/02/0020.

## Obsah

<b>1</b>	<b>Základní pojmy a definice</b>	<b>6</b>
1.1	Pojmy z analýzy signálů . . . . .	6
1.2	Pojmy z teorie náhodných procesů . . . . .	6
1.3	Pojmy z teorie stochastických diferenciálních rovnic . . . . .	12
1.4	ARMA modely . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Analýza nestacionárních náhodných procesů</b>	<b>16</b>
2.1	Analytické modely seizmogramů . . . . .	16
2.2	Negaussovské modely . . . . .	18
2.3	Jednoduché rozklady typu $v(t) = m(t)v_s(t)$ . . . . .	18
2.4	Rozklady pro nestacionární spektrum . . . . .	24
2.4.1	Rozklady využívající evoluční spektrum . . . . .	24
2.4.2	Víceúrovňové rozklady . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Aproximace spektrální hustoty</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>Řešení úloh</b>	<b>32</b>
4.1	Deterministické řešení . . . . .	33
4.2	Stochastická Newmarkova metoda . . . . .	35
4.2.1	Buzení modulovaným bílým šumem. . . . .	36
4.2.2	Diskrétní ARMA model buzení, $p \geq 1$ . . . . .	37
4.2.3	Zobecnění metody pro pravou stranu obsahující derivaci . . . . .	39
4.2.4	Numerické příklady . . . . .	39
4.3	Korelační metoda . . . . .	41
4.3.1	Korelační metoda pro jednotlivé modulace . . . . .	42
4.3.2	Chybová analýza . . . . .	45
4.3.3	Korelační metoda pro víceúrovňové rozklady . . . . .	46
4.4	Korelační metoda s diskretním ARMA buzením . . . . .	47
4.5	Metoda spektrálních rozkladů . . . . .	50
4.5.1	Heavisideova modulace . . . . .	54
4.5.2	Modulace dvojité exponenciály . . . . .	55
4.5.3	Po částech polynomiální (splajnová) modulace . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>60</b>
<b>6</b>	<b>Použitá literatura</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>Použité příklady</b>	<b>66</b>
A.1	Příklad 1 . . . . .	66
A.2	Příklad 2 . . . . .	67
<b>B</b>	<b>Rozklad inverze maticového polynomu</b>	<b>69</b>
<b>C</b>	<b>Příklady analýzy sesimogramů</b>	<b>74</b>

## Úvod

Mechanika je nauka o pohybu těles či jejich soustav. Soustavou se zde rozumí skupina spolupůsobících objektů, které jsou podrobeny vnitřním a vnějším vlivům. Klasická mechanika předpokládá, že jsme schopni veškeré parametry soustav i okolních vlivů popsat přesně. Ve skutečnosti tomu tak není. Polohu, rychlost, hmotu, působící síly i jiné vlastnosti popisujeme pouze přibližně a věříme, že pokud se při určení vstupních údajů nedopustíme příliš velkých chyb, výsledky nebudou daleko od skutečnosti. Další chyb se běžně dopouštíme zjednodušováním výpočetních modelů. Užíváme linearizace nelineárních úloh, zavádíme jednoduché typy tlumení, počítáme rovinné úlohy namísto prostorových. Úroveň přesnosti výpočtů takového typu je však možno regulovat zpřesněním odhadů či měření vstupních parametrů, použitím přesnějšího matematického modelu, výpočtem ve více dimenzích či jemnější sítí v konečných prvcích.

Existují však neurčité parametry, jejichž neurčitosti není možno se zbavit přesnějším měřením či delším výpočtem. Není únosné měřit s přesností na desetiny milimetru povrch kolejí na mnohasetkilometrových tratích. Není možné předpovědět průběh síly větru působící na konstrukci v následující minutě, hodině či jiné době. A stejně tak není možno předpovědět přesný průběh budoucího zemětřesení.

Mechanika začala výrazněji používat statistické metody zhruba před padesáti lety, k prvním průkopníkům patřil Caughey (1954); Caughey and Hudson (1955). První monografii o stochastických vlastnostech hluku vydal Bendat (1958) a první monografii speciálně zaměřenou na mechaniku Bolotin (1961). Po něm následoval Robson (1964) a další až do současnosti, z posledních jmenujme knihu Lin (1995). Začátkem šedesátých let se rovněž objevily studie, které se týkaly stochastické dynamické odezvy stavebních konstrukcí na účinky větru a zemětřesení (např. Barstein (1959, 1960), Davenport (1962), Novák and Fischer (1966)). Mezi aplikace stochastické mechaniky patří mimo stavebnictví i strojírenství a doprava (například modelování nerovností jízdní dráhy), letectví či výstavba lodí a mořských vrtných věží.

Je nutno podotknout, že stochastický popis seizmických událostí, jak byl původně vyvinut inženýry, ale i v nejdokonalejší formě podle seismologů, má následující omezení:

- Model je založen napředpokladu, že zdroj zemětřesení je v jediném bodě.
- Model není vhodný pro simulaci dlouhoperiodických efektů blízké zóny, očekávaných v okolí zdroje v důsledku skluzu na zlomu.
- Model popisuje časovou proměnlivost pohybu podloží, nikoli však prostorovou variabilitu, která se uplatní pro rozsáhlé konstrukce, jako dlouhé mosty, potrubí, tunely či přehrady.

Seismologové proto upřednostňují kinematické modelování pohybu podloží. Vychází z modelu dějů na zlomu a šíření vln ve skutečném podloží. Takový model pak dává dosti realistické akcelerogramy pro danou orientaci zlomové plochy, sílu a lokalitu děje.

I přes tento (zajisté oprávněný) názor však nemusíme stochastický popis opouštět, existuje řada aplikací, kdy je opodstatněný, často i jediný možný.

Předkládaná práce byla původně zaměřena výhradně na vývoj numerických metod pro řešení stochastických lineárních diferenciálních rovnic a problémy s tímto řešením spojené. Brzy se však ukázalo, že toto téma nelze izolovat od fyzikálního i teoreticky matematického pozadí. Práce tak překračuje hranice jednoho oboru. Proto byl do úvodní kapitoly zařazen stručný (stručný obsahem, nikoli rozsahem) přehled použitého matematického aparátu.

Popis vstupních dat úloh i výsledků je ve stochastickém případě výrazně náročnější než v případě deterministickém. Druhá kapitola této práce je proto věnována popisu seizmogramů jazykem teorie náhodných procesů, aby je bylo možno použít jako vstupní data numerických metod. Pojednává stručně o historii problému, o možných transformacích (rozkladech) nestacionárních procesů na součet modulovaných stacionárních procesů a o popisu (volbě) tvaru spektrálních hustot stacionárních částí. Jako vlastní přínos navrhuje obecnou splajnovou modulaci a víceúrovňový rozklad jako nástroje k popisu či odstranění nestacionarity signálů.

Třetí kapitola je věnována charakteristice stacionarizovaných záznamů, zvláště pak volbě vhodné spektrální hustoty.

Numerické řešení stochastických diferenciálních rovnic je výrazně náročnější než je tomu v deterministickém případě. To vede k tomu, že vedle analogií metod řešení klasických problémů se objevují i metody zcela nové. Oběma kategoriím metod je věnována čtvrtá a poslední kapitola. Věnuje se historickému přehledu a v současnosti vyvíjeným (používaným) metodám. Nově navrhuje modifikace metody korelační a metody spektrálních rozkladů pro splajnové modulační funkce, modifikaci korelační metody pro diskrétní ARMA buzení a buzení tvaru víceúrovňového rozkladu a zobecnění stochastické Newmarkovy metody pro pravou stranu rovnice obsahující derivaci budicí funkce. Ukazuje možnosti metod ve spojitosti s víceúrovňovými rozklady a evolučními spektry. Ke každé metodě se zde uvádí numerické příklady, které jsou detailně popsány v příloze A.

Příloha B obsahuje odvození metody pro výpočet rozložené inverze maticového polynomu, která je autorovým příspěvkem k základní verzi metody spektrálních rozkladů. Příloha C pak ukazuje příklady analýzy několika (víceméně náhodně) vybraných seizmogramů.

## Seznam použitého označení

Práce samotná vychází z potřeb inženýrského prostředí, proto přejímá i inženýrskou terminologii. Proto bude například korelační (kovarianční) funkce resp. matice bude značena jako  $K(s, t)$  resp.  $\mathbf{K}(s, t)$  namísto obvyklejšího  $R(s, t)$ . Výrazem *korelační* (matice, funkce, metoda) je z historických důvodů míněna *nenormalizovaná* kovarianční funkce. Slovem *buzení* je zpravidla míněna pravá (známá) strana rovnice, slovem *odezva* pak řešení rovnice. Slovem seizmogram je míněn záznam pohybů půdy bez rozlišení, zda jde o polohu, posun či rychlost. Ošklivé slovo stacionarizovaný znamená „stacionární, vzniklý z nestacionárního“. Matice budou značeny velkými tučnými písmeny, vektory pak malými tučnými písmeny. Výjimkou bude například symbol  $\mathbf{m}(t)$ , který označuje (podle kontextu) buď matici nebo vektor modulačních funkcí. Symboly, jejichž význam přesahuje hranice jednotlivých odstavců, jsou vyjmenovány níže. Lokálně použité symboly mohou duplikovat symboly z této tabulky, budou však vždy příslušně vysvětleny.

### Operátory

$E$  operátor matematického středu  
 $\mathcal{F}$  operátor Fourierovy transformace  
 $D, B$  diferenciální, diferenční operátor  
 $\bullet^T, \bullet^H$  transpozice, Hermitovská sdruženost

### Náhodné procesy

$\{X_t, t \in T \subset \mathbb{R}\}, \{X(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$   
 náhodný proces s diskrétním, resp. spojitým nezávislým parametrem probíhajícím množinu  $T$ . V místech, kde je vyloučeno zmatení, nebo kde je možno hovořit o obou formách náhodných procesů, jsou používány obě značení libovolně.  
 $\{w_t\}, \sigma_w^2$  posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovým středem a rozptylem  $\sigma_w^2$   
 $w(\tau), I_0$  spojitý bílý šum, jeho intenzita  
 $W_t$  Wienerův proces  
 $\mathbf{D}_w$  matice vzájemných intenzit vektoru bílých šumů,  $\mathbf{D}_w = E\{d\mathbf{W}_t d\mathbf{W}_t^H\}$   
 $\eta_i$  diskrétní náhodný proces vyhovující ARMA modelu  
 $K(t_1, t_2), K_k, \mathbf{K}(t_1, t_2)$ , spojitá, diskrétní korelační funkce, matice  
 $\mathbf{D}(t)$  disperzní matice,  $\mathbf{D}(t) = \mathbf{K}(t, t)$   
 $\Psi(\omega), \psi(\omega)$  (nenormalizovaná) spektrální hustota, speciální tvar AR(2) spektrální hustoty (47)  
 $I_c(\omega), I_N(\omega)$  spojitý, diskrétní periodogram

### Koeficienty

$t, \Delta t$  nezávislá proměnná (čas), časový krok  
 $\omega, \Delta\omega$  frekvence, frekvenční krok  
 $a_i, b_i$  koeficienty diskrétního ARMA procesu  
 $a, b$  koeficienty spektrální hustoty (47) v metodě spektrálních rozkladů  
 $\alpha_i, \beta_i$  koeficienty spojitého ARMA procesu  
 $\alpha, \beta$  koeficienty dvojité exponenciální modulační funkce  
 $\zeta_i$  koeficienty B-splajnu

### Modulační funkce

$h(t)$  Heavisideova skoková funkce (unit step function)  
 $m(t), \mathbf{m}(t)$  skalární, vektorová (maticová) modulační funkce  
 $B^{[M]}(t)$  bázeová funkce B-splajnu řádu  $M$

### Matice

$\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  matice hmotnosti, útlumu a tuhosti zkoumané soustavy, matice tuhosti a útlumu podpor konstrukce — viz rovnice (50).  
 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$  odezva, buzení  
 $\mathbf{Q}$  matice diferenciální soustavy po převedení do Cauchyho tvaru nebo její varianty  
 $\mathbf{R}$  maticová exponenciála,  $\mathbf{R} = \exp(\mathbf{Q} \Delta t_i)$

## 1 Základní pojmy a definice

### 1.1 Pojmy z analýzy signálů

Celková délka zkoumaného signálu bude označována  $T$ , diskretizační krok jako  $\Delta t$ . Počáteční čas (čas prvního vzorku)  $t_0$ , zpravidla  $t_0 = \Delta t$ . Počet vzorků je roven  $N = T/\Delta t$ .

Fourierova transformace bude používána ve tvaru

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

a její inverzní transformace ve tvaru

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{+i\omega t} d\omega$$

diskrétní verze Fourierovy transformace ve tvaru

$$F_l = \frac{1}{2\pi} \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ikl\Delta\omega\Delta t}$$

kde  $F_l = F(l\Delta\omega)$  a  $f_k = f(k\Delta t)$ . Pro použití rychlé Fourierovy transformace je pak vhodné uvažovat závislost

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{N}$$

Z toho pak plyne

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad \text{a} \quad \Delta\omega = 2\pi \frac{1}{T}$$

Inverzní diskrétní FT bude

$$f_k = \frac{1}{N} \Delta\omega \sum_{l=0}^{N-1} F_l e^{+ikl\Delta\omega\Delta t}$$

Výsledkem FFT je  $N$  hodnot v intervalu  $\langle -\Omega, \Omega \rangle$  pro  $\Omega = \frac{\pi}{\Delta t}$ , v případě kosinové transformace jsou výsledkem hodnoty  $\langle 0, 2\Omega \rangle$ . To proto, že kosinová transformace předpokládá, že vzor je funkce sudá a proto má k dispozici vzorek dvojnásob dlouhý.

### 1.2 Pojmy z teorie náhodných procesů

*Pravděpodobnostní prostor*  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je prostor jevů  $\omega \in \Omega$  s neprázdným systémem podmnožin  $\mathcal{A} \subset \Omega$  tvořící  $\sigma$ -algebru.  $P$  budiž míra na systému  $\mathcal{A}$ , která každému  $A \in \mathcal{A}$  přiřadí číslo  $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$ ;  $P(\Omega) = 1$  („pravděpodobnost jevu“).

$\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra pokud  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{A}$ .

*Náhodná veličina*  $X$  je měřitelné zobrazení pravděpodobnostního prostoru  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  do prostoru  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , kde  $\mathcal{B}$  je systém Borelovských množin v  $\mathbb{R}$ .

*Borelovské množiny* jsou množiny Borelova okruhu nad systémem všech množin prostoru. *Borelov okruh* nad systémem množin  $\mathcal{A}$  je nejmenší  $\sigma$ -okruh obsahující  $\mathcal{A}$ . Systém množin je  $\sigma$ -okruhem, pokud je  $\sigma$ -aditivní a rozdíl dvou množin ze systému opět do systému patří. Systém je  $\sigma$ -aditivní, pokud do systému patří i spočetné sjednocení množin systému.

*Pravděpodobnostní míra* v prostoru  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  budiž označena  $Q : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$  tak, že  $Q(B) = P(X^{-1}(B))$  (tzn. pravděpodobnost jevu jehož náhodnou veličinou je  $B$ ). Pak platí:  $Q(\mathbb{R}) = 1$  neboť  $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$

*Distribuční funkce*  $F(x) = Q(B)$  náhodné veličiny  $X$  se získá volbou  $B = (-\infty, x) \in \mathcal{B}$ .



Střední hodnotou náhodné veličiny  $X$  (značíme  $\mathbf{E}X$ ) se míní integrál

$$\int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$$

pokud existuje. Platí rovněž:

$$\int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x F'(x) dx$$

pokud  $F(x)$  je absolutně spojitá a (tedy)  $F'(x)$  existuje. Taková  $F'(x) = f(x)$  je nazývána *rozložením (hustotou) pravděpodobnosti*.

Budiž  $g$  borelovsky měřitelná funkce na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Pak

$$\int g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) dQ(t)$$

*Náhodným procesem* se nazývá systém náhodných veličin  $\{X_t, t \in T\}$  pro  $T \subseteq \mathbb{R}$ . V případě, že  $T = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , bude  $X_t$  *náhodný proces se spojitým parametrem (časem)* (někdy nesprávně *spojitý proces*), pokud  $T = \mathbb{N}$  nebo  $T = \mathbb{Z}$  půjde o *náhodnou posloupnost*. Pokud je třeba zdůraznit, že  $X_t$  je náhodný proces, bývá použit ještě druhý parametr  $X(t, \omega)$ ,  $\omega \in \mathcal{A}$ . Pro pevné  $t$  se požaduje, aby  $X(t, \omega)$  byla  $\mathcal{A}$ -měřitelná. Pro pevné  $\omega$  je  $X_t$  (jakožto funkce  $t$ ) nazýváno *realizace*.

*Momenty (momentové funkce) náhodného procesu*  $X(t, \omega)$  vzhledem k vektoru  $a = (a_1, \dots, a_n)$  jsou funkce

$$r_{k_1, \dots, k_s} = \mathbf{E} \left\{ [X(t_1) - a_1]^{k_1} \dots [X(t_s) - a_s]^{k_s} \right\}, \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

pokud matematický střed na pravé straně existuje pro každé  $t_i \in T$ . Veličina  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_s$  se nazývá řádem momentové funkce.

Každá náhodná veličina je vyčerpávajícím způsobem popsána svou distribuční funkcí. Pro kompletní popis náhodného procesu je třeba znát sdružené rozložení pravděpodobnosti všech náhodných veličin, které náhodný proces tvoří. Nicméně podle Doob (1953) k popisu pravděpodobnostní struktury náhodného procesu stačí (za obecných podmínek) znát sdruženou distribuční funkci proměnných  $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$  pro všechny hodnoty  $n$  a všechny vhodné volby  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Zpravidla však namísto kompletního popisu náhodného procesu stačí znalost několika prvních momentů. V případě gaussovských procesů dokonce první dva momenty popisují proces zcela.

Proces  $X(t)$  je *zcela (silně) stacionární*, pokud pro každé vhodné  $t_1, t_2, \dots, t_n$  a  $k$  je sdružené rozložení pravděpodobnosti proměnných  $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$  identické sdruženému rozložení pravděpodobnosti proměnných  $\{X(t_1) + k, \dots, X(t_n) + k\}$ .

Proces  $X(t)$  je *stacionární až do řádu  $m$* , pokud pro každé vhodné  $t_1, t_2, \dots, t_n$  a  $k$  všechny sdružené momenty až do řádu  $m$  existují a nezávisí na hodnotě posunu  $k$ .

Pokud pro každé  $t \in T$  existují střední hodnoty  $\mathbf{E}X_t$ , je možno definovat *střední hodnotu náhodného procesu*  $\mu_t = \mathbf{E}X_t$ .

Pokud pro každé  $t \in T$  platí  $\mathbf{E}|X_t|^2 < \infty$ , má proces  $\{X_t\}$  *konečné druhé momenty* (a pak také existuje střední hodnota).

*Kovarianční, korelační funkce* procesu  $\{X_t\}$  s konečnými druhými momenty se definuje vztahem

$$K(s, t) = \mathbf{E}(X_s - \mu_s) \overline{(X_t - \mu_t)} \quad (1)$$

*Rozptyl (disperse)* procesu v čase  $t$  se nazývá hodnota  $K(t, t)$ .

Pokud je možno psát, že  $K(s, t) = K(s - t)$ , proces  $\{X_t\}$  se nazývá *kovariančně stacionární*.

Pokud navíc  $\mu_t$  nezávisí na  $t$  ( $\mu_t = \mu$  pro všechna  $t \in T$ ), bude  $\{X_t\}$  *slabě stacionární, stacionární až do řádu 2*. V následujícím se předpokládá právě tato slabá stacionarita a bude nazývána prostě stacionaritou. Je to korektní už proto, že se práce omezuje na gaussovské náhodné procesy, kde slabá stacionarita implikuje stacionaritu silnou.

Rozptyl stacionárního procesu je  $\sigma^2 = K(0)$ .

Normalizovaná kovarianční (korelační, autokorelační) funkce  $\rho(t)$  se definuje jako  $\rho(t) = \frac{K(t)}{\sigma^2}$ .

Proces  $\{X_t\}$  je *spojitý podle středu* v bodě  $t_0 \in T = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , jestliže při  $t \rightarrow t_0$  konvergují  $X_t$  k  $X_{t_0}$  podle středu, tj. když

$$\mathbf{E} |X_t - X_{t_0}|^2 \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad t \rightarrow t_0$$

V takovém případě se píše  $X_{t_0} = \text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} X_t$  a hovoří se o *konvergenci podle (kvadratického) středu*.

Podle Wiener-Chinčiny věty existuje pro každou autokorelační funkci  $\rho(t)$  stacionárního procesu spojitého podle středu taková neklesající funkce  $F(\omega)$ ,  $F(-\infty) = 0$  a  $F(\infty) = 1$ , že

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \quad \forall t \quad (2)$$

Taková funkce  $F(\omega)$  je nazývána *spektrální distribuční funkce* a její derivace  $F'(\omega) = f(\omega)$  (pokud existuje) pak *(normalizovaná) spektrální hustota*.

(Nenormalizovanou) oboustrannou spektrální hustotu je možno definovat

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi$$

Někdy se rovněž zavádí jednostranná spektrální hustota jako  $G(\omega) = 2\Psi(\omega)$  pro  $\omega \geq 0$ ,

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (3)$$

Následující dva pojmy se běžně nepoužívají: Proces je *stacionární v čase*, pokud jeho střed  $\mu_t$  a rozptyl  $K(t, t)$  se nemění pro různá  $t \in T$ . Proces je *stacionární ve frekvenci*, pokud se nemění frekvenční obsah pro jeho různé úseky  $X(\tau)$ ,  $\tau \in \mathcal{I}_t$ , kde  $\mathcal{I}_t = (t - \gamma, t + \gamma) \subset T$  pro procesy se spojitým časem a  $\mathcal{I}_t = \{t - \gamma, \dots, t + \gamma\} \subset T$  pro diskrétní procesy. Není těžké nahlédnout, že díky Wiener-Chinčiny větě (2) je stacionarita ve frekvenci ekvivalentní kovarianční stacionaritě.

**Periodogram** Jakkoli periodogram diskrétního náhodného procesu není sám o sobě konzistentním nestranným odhadem spektrální hustoty, je vždy základem jejích odhadů. Odhady spektrální hustoty prezentované v této práci byly vypočteny jako periodogram zhlazený Parzenovým okénkem, viz Parzen (1961).

Periodogram spojitého náhodného procesu je definován v Anděl (1967) na str. 75 takto:

$$I_c(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad \text{pro} \quad -\infty < \omega < \infty \quad (4)$$

Jeho diskrétní verze pak takto:

$$\tilde{I}_N(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N x_t e^{-i\omega t} \right|^2 \quad \text{pro} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (5)$$

Tato formulace však skrývá nevyřčený předpoklad  $\Delta t = 1$ . Pro obecné  $\Delta t$  bude mít periodogram tvar

$$I_N(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N x_t e^{-i\omega t} \right|^2 \quad \text{pro} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta t} \quad (6)$$

Přechod mezi (4) a (6) je jednoduché odvodit:

$$I_c(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \approx \frac{1}{2\pi \Delta t N} \left| \Delta t^2 \sum_{j=1}^N x_j e^{-i\omega \Delta t j} \right|^2 = I_N(\omega \Delta t)$$

**Autokovariance** Jako je spektrální hustota svázaná s kovariancí, měly by být svázány i odhady obou funkcí.

*Periodický* odhad autokovarianční funkce předpokládá, že  $x(t) = x(t + T)$  resp.  $x_k = x_{k+N}$

$$K_k = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N x_l x_{l+k}$$

narozdíl od *neperiodického* odhadu

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N-k} x_l x_{l+k}$$

Podle Anděl (1967) kap. VII, lemma 2 je (za předpokladu  $\Delta t = 1$ ) kosinová transformace koeficientů neperiodického odhadu autokovariance rovna periodogramu:

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( C_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_k \cos k\omega \right)$$

Zobecnění pro obecné  $\Delta t$  nahradí jedničku ve členu  $\frac{1}{2\pi}$  skutečným krokem  $\Delta t$ .

Pro periodický odhad platí podobný vztah, jen kosinová transformace je nahrazena Fourierovou transformací:

$$I_N(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega k} K_k$$

Pochopitelně,  $C_0 = K_0 = \sigma^2$  je rozptyl (stacionárního) procesu.

**Bílý šum** Budiž  $\{w_t\}$  stacionární posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovými středními hodnotami  $E\{w_t\} = 0$  a rozptylem  $E|w_t| = \sigma_w^2$ . Její kovarianční funkce je rovna

$$K(t) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \neq 0 \end{cases}$$

Podle věty o spektrálním rozkladu je možno psát  $K(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda)$ . Existence (obousměrné) spektrální hustoty  $\Psi(\lambda)$  je zajištěna splněním podmínkou  $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |K(t)| < \infty$ . Proto bude  $K(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \Psi(\lambda) d\lambda$  a z toho  $\Psi(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ ,  $G(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi}$ .

V reálných případech se často náhodné posloupnosti (i bílému šumu) připisuje fyzikální význam. K dispozici však jsou jen posloupnosti, které mají omezené trvání a nenulovou vzorkovací periodu. Má-li daná posloupnost reprezentovat bílý šum (resp. část nekorelovaného nekonečného procesu), bude jeho spektrální hustota přibližně  $G(\omega) \approx G_0 = \sigma^2 \frac{\pi}{\Delta t}$ , kde  $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N x_l x_l = K(0) = \Delta\omega \sum G(k)$  je obvyklý odhad rozptylu.

Bílý šum ve formě spojitého náhodného procesu neexistuje. Jeho rozptyl (ve fyzikálním významu energie) je nekonečný. Matematicky jej lze v jistém smyslu charakterizovat autokovarianční funkcí (viz Bolotin (1961))

$$K(t) = \mathbb{E}[w(t + \tau)w(\tau)] = I_0\delta(t) \quad (7)$$

kde  $I_0$  je *intenzita bílého šumu* a  $\delta(t)$  je Diracova  $\delta$ -funkce. Jeho spektrální hustota je konstantní, a to

$$\Psi(\omega) = S_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi} I_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi} I_0, \quad G(\omega) = G_0 = \frac{I_0}{\pi}$$

z čehož je vidět, že zde má intenzita podobný význam jako rozptyl. Nicméně, narozdíl od intenzity, je rozptyl, definovaný jako  $\sigma^2 = K(0)$  a rovný integrálu spektrální hustoty,  $\sigma^2 = \int_0^{\infty} G(\omega)d\omega$ , pro spojitý bílý šum nekonečný. Poslední vztah je možno ověřit ještě jiným způsobem. Podle rovnosti (3),

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} G_0 \cos(\omega\tau)d\omega \quad (8)$$

bude (po řadě z (7) a (8))

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = G_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau)d\omega d\tau = G_0 2 \lim_{\omega \cdot \tau \rightarrow \infty} \text{Si}(\omega\tau) = G_0\pi$$

Takto zavedený bílý šum se spojitým časem je možno formálně zapsat jako (zobecněnou) derivaci Wienerova procesu  $W_t$  (viz např. Mizerová (2000)).

$$w_t = \frac{dW_t}{dt} \quad (9)$$

$I_0$  je pak rychlost přírůstku variance Wienerova procesu  $W_t$ . Připomeňme některé vlastnosti Wienerova procesu: Wienerův proces (Brownův pohyb) je gaussovský náhodný proces s nekorelovanými (a proto nezávislými) přírůstky a spojitými trajektoriemi. Střední hodnota Wienerova procesu s počátkem v bodě 0 je nulová,

$$\mathbb{E}W_t = 0, \quad \forall t \quad (10)$$

Vlastnost (10) se v dalším bude vždy předpokládat. Neboť Wienerův proces není stochasticky diferencovatelný, rovnice (9) se zpravidla interpretuje jako stochastická integrální rovnice

$$W_t = \int_0^t w_u du$$

nebo v diferenciálním tvaru

$$dW_t = w_t dt$$

**Generování náhodného procesu o zadané spektrální hustotě** Podle práce Shinozuka and Jan (1972) je možno vytvořit realizaci náhodného procesu s předepsanou spektrální hustotou jako harmonický proces s náhodnou fází

$$X_t = \sqrt{2\Delta\omega} \text{Re}\{\text{FFT}(\sqrt{G(\omega_j)}e^{i\varphi_j})\} \quad \omega_j = j\Delta\omega, \quad j = 1, \dots, N, \quad \varphi_j \in \text{rand}(0, 2\pi)$$

Periodogram takového procesu je přímo roven zadané (oboustranné) spektrální hustotě.

**Evoluční spektrum** Evoluční spektrální analýzu poprvé představil Priestley (1965) a spolu s dalšími ji pak rozpracoval v mocný nástroj k frekvenční analýze nestacionárních náhodných procesů.

Budiž  $X(t)$  (komplexní) spojitý centrovaný (nestacionární) náhodný proces,  $\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty \forall t$  s kovarianční funkcí  $K(s, t) = \mathbb{E}X(s)\overline{X(t)}$ . Třída *oscilujících procesů* je tvořena takovými procesy, pro které existuje množina  $\mathfrak{F}$  funkcí  $\{\phi(t, \omega)\}$  definovaných pro reálná  $\omega$  a míru  $\mu(\omega)$  takovou, že pro každá  $s, t$  platí

$$K(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, \omega) \overline{\phi(s, \omega)} d\mu(\omega) \quad (11)$$

Aby měl proces  $X(t)$  konečnou varianci, musí pro každé  $t$  být  $\phi(t, \omega)$  integrovatelné s kvadrátem vzhledem k míře  $\mu(\omega)$ . Pak je také možno psát

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, \omega) dZ(\omega)$$

kde  $Z(\omega)$  je ortogonální proces, pro nějž  $\mathbb{E}|dZ(\omega)|^2 = d\mu(\omega)$ . Míra  $\mu(\omega)$  zde má stejnou úlohu, jako integrované spektrum pro stacionární proces a jeho spektrální rozklad. Podobně jako ve stacionárním případě, i zde bude nutno předpokládat, že míra  $\mu(\omega)$  je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře.

Funkce  $\phi(t, \omega)$  jakožto funkce  $t$  bude zvána *oscilující funkcí*, pokud pro nějaké  $\theta(\omega)$  bude možno psát

$$\phi(t, \omega) = A(t, \omega) e^{i\theta(\omega)t} \quad \text{kde } A \text{ je tvaru } A(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dK(\omega, \theta) \quad (12)$$

a  $|dK(\omega, \theta)|$  má absolutní maximum pro  $\theta = 0$ . Funkce  $A(t, \omega)$  může být chápána jako obálka funkce  $\phi(t, \omega)$ . Při použití vztahu (11) a (12) bude po transformaci proměnných možno psát pro kovarianční funkci

$$K(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega) \overline{A(s, \omega)} e^{i\omega(t-s)} d\mu(\omega)$$

a odpovídajícím způsobem bude možno vyjádřit rozklad nestacionárního náhodného procesu jako

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (13)$$

Nyní lze definovat *evoluční výkonové spektrum*  $dH(t, \omega)$  v čase  $t$  a vzhledem k množině oscilačních funkcí  $\{\phi(t, \omega)\} = \{A(t, \omega) e^{i\omega t}\}$  jako

$$dH(t, \omega) = |A(t, \omega)|^2 d\mu(\omega)$$

Pochopitelně platí

$$\text{var}\{X(t)\} = K(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} |A(t, \omega)|^2 d\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dH(t, \omega)$$

takže sama variance procesu je nezávislá na konkrétně zvolené množině  $\mathfrak{F}$  a pro každou takovou množinu představuje celkovou energii procesu v čase  $t$ .

Je-li míra  $\mu(\omega)$  absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře, je možno každé  $t$  psát

$$dH(t, \omega) = h(t, \omega) d\omega$$

a takové  $h(t, \omega)$  je pak nazýváno *evoluční spektrální hustotou*.

Priestleyho definici evolučních spekter EPS rozšířil Battaglia (1979) tak, aby odstranil některé teoretické nedostatky. Třída oscilujících procesů totiž není uzavřená vzhledem k součtu nezávislých prvků (procesů) a koherence dvourozměrného oscilujícího nemusí být závislá na čase. Proto Battaglia definoval širší třídu tzv. *sigma-oscilujících procesů*, která již uvedené nedostatky nemá. *Sigma-oscilující proces*  $Y(t)$  je definován jako konečný součet

$$Y(t) = \sum_{k=1}^p X_k(t) \quad (14)$$

vzájemně statisticky nezávislých oscilujících procesů  $X_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ .

### 1.3 Pojmy z teorie stochastických diferenciálních rovnic

O procesu  $\{X_t\}$  s konečnými druhými momenty se řekne, že je *stochasticky diferencovatelný* v bodě  $t_0 \in T = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  s derivací  $\dot{X}_{t_0}$ , jestliže

$$\text{l.i.m.}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (X_{t_0+h} - X_{t_0}) = \dot{X}_{t_0} \quad \text{pro} \quad t \rightarrow t_0$$

*Riemanův integrál* procesu  $\{X_t\}$  (stochastický integrál) se definuje jako limita

$$\int_a^b X_t dt = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty, \Delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (t_{i+1} - t_i)$$

pro rozumná dělení  $t_i$  s krokem nejvýše  $\Delta_n$  intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

*Itoův integrál* náhodné funkce vzhledem k Wienerovu procesu se definuje jako limita

$$\int_a^b f(t) dW_t = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty, \Delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

pro vhodná dělení  $t_i$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  s krokem nanejvýš  $\Delta_n$ . Definici je možno jednoduše rozšířit na integrál vzhledem k vektorovému Wienerovu procesu

$$\int_a^b \mathbf{F}(t) d\mathbf{W}_t$$

kde  $\mathbf{W}_t$  je vektorový Wienerův proces a  $\mathbf{F}(t)$  je maticová náhodná funkce o vhodných rozměrech.

Některé vlastnosti Itoova integrálu:

$$1. \quad \mathbb{E} \int_0^T f dW_t = 0 \quad (15)$$

$$2. \quad \mathbb{E} \left( \int_0^T f dW_t \int_0^T \bar{g} d\bar{W}_t \right) = \int_0^T f(t) \bar{g}(t) \nu(t) dt, \quad \nu(t) = \mathbb{E} (dW_t d\bar{W}_t) \quad (16)$$

$$3. \quad \mathbb{E} \left( \int_0^T \mathbf{f} d\mathbf{W}_t \left( \int_0^T \mathbf{g} d\mathbf{W}_t \right)^H \right) = \int_0^T \mathbf{f}(t) \mathbf{D}_w \mathbf{g}^H(t) dt, \quad \mathbf{D}_w = \mathbb{E} (d\mathbf{W}_t d\mathbf{W}_t^H) \quad (17)$$

*Itoův diferenciál* je klíčová formule při řešení stochastických diferenciálních rovnic.

Řekne se, že náhodný proces  $X_t$  má stochastický diferenciál

$$dX_t = u dt + v dW_t, \quad t \in \langle 0, T \rangle$$

pokud

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s \quad (18)$$

## 1.4 ARMA modely

Diskrétní smíšený model autoregrese řádu  $p$  a klouzavých součtů řádu  $q$  (ARMA( $p, q$ )) je uvažován v následujícím tvaru:

$$\eta_t + \sum_{i=1}^p a_i \eta_{t-i} = w_t + \sum_{j=1}^q b_j w_{t-j} \quad (19)$$

kde  $w_t$  je nekorelovaný proces (bílý šum) o nulové střední hodnotě a rozptylu  $\sigma_w^2$ . Někdy bude pro jednoduchost dodefinováno  $a_0 = b_0 = 1$  a indexy v sumách rovnice (19) budou nabývat hodnot od nuly. Budiž

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^i \quad \text{a} \quad B(z) = 1 + \sum_{j=1}^q b_j z^j$$

Pro asymptotickou stabilitu náhodného procesu  $\eta_t$  je třeba, aby kořeny  $\mu_j$  charakteristického polynomu autoregresní části  $A(z)$  ležely vně jednotkového kruhu,  $|\mu_j| > 1$ . Spektrální hustota diskrétního ARMA procesu je rovna

$$f(\omega) = \frac{\sigma_Y^2 |B(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |A(e^{-i\omega})|^2}$$

Někdy je pro definici (19) výhodné využívat operátorový zápis: Při označení operátoru zpětné diference jako  $\mathcal{B}$ :  $\mathcal{B}\eta_t = \eta_{t-1}$ , bude možno rovnici (19) zapsat ve tvaru

$$A(\mathcal{B})\eta_t = B(\mathcal{B})w_t$$

Výše definovaný ARMA proces je možno chápat rovněž jako lineární filtr s přenosovou funkcí  $h(t)$ , jejíž Fourierova transformace  $H(\omega)$  je rovna

$$H(\omega) = \frac{B(e^{-i\omega})}{A(e^{-i\omega})}$$

Konstrukce *spojitého ARMA( $p, q$ ) modelu* je díky přítomnosti spojitého bílého šumu problematická a ne zcela korektní. Přesto je tento model často používán. V (Priestley, 1988) je spojité ARMA( $p, q$ ) definován jako

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i X^{(i)}(t) = \int_0^q b(u) w(t-u) du \quad (20)$$

kde  $\alpha_p = 1$ ,  $w(u)$  je spojité bílé šum intenzity  $I_0$  (jakožto derivace Wienerova procesu  $W(t)$ ) a  $b(u)$  je vhodná funkce. Rovnici (20) je možno přepsat do matematicky korektní podoby

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i X^{(i)}(t) = \int_{t-n}^t b(t-u) dW(u)$$

Pro zdůraznění analogie s diskretními modely je rovněž možno uvést operátorový zápis

$$\mathcal{A}(\mathcal{D})X(t) = \mathcal{B}(\mathcal{D})w(t) \quad (21)$$

kde  $\mathcal{A}(z) = \sum_{i=0}^p \alpha_i z^i$  je charakteristický polynom levé strany (autoregresní části) rovnice (20),  $\mathcal{B}(z) = \int_0^q b(u) e^{-uz} du$  a  $\mathcal{D}$  je diferenciální operátor. Vyjádření pravé strany rovnice (21) je důsledkem formální rovnosti  $x(t-u) = e^{-u\mathcal{D}} \cdot x(t)$ . Narozdíl od diskretního případu zde funkce  $\mathcal{B}(z)$  *není* polynom (oproti polynomu  $B(z)$ ) a nelze nic tvrdit o tvaru přenosové

funkce či spektrální hustoty. Aby se zachoval racionální tvar přenosové funkce a spektrální hustoty, formuluje se pravá strana rovnice (21) jako polynom  $\mathcal{B}_0(z) = \sum_{i=0}^q \beta_i z^i$  a spojitý ARMA model se uvažuje ve tvaru

$$X^{(p)}(t) + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i X^{(i)}(t) = \beta_0 w(t) + \sum_{i=1}^q \beta_i w^{(i)}(t) \quad (22)$$

Taková definice pak již nemá s původní definicí spojitého ARMA (tzn. výrazem (20)) mnoho společného. Navíc je z výše řečeného zřejmé, že taková definice je pouze formální, neboť těžko lze mluvit o derivacích neexistujícího bílého šumu. Na druhou stranu je možno nadefinovat lineární filtr s racionální přenosovou funkcí  $\vartheta(t)$  odpovídající diferenciální rovnici (22) s nulovými počátečními podmínkami. Fourierova transformace  $\Theta(\omega)$  této přenosové funkce bude mít tvar

$$\Theta(\omega) = \frac{\mathcal{B}(i\omega)}{\mathcal{A}(i\omega)}$$

Takto definovaný filtr se spojitým bílým šumem (jakožto procesem s konstantní spektrální hustotou) na vstupu bude korektní, pokud bude

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Theta(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

Matematicky korektní definice spojitého ARMA modelu jakožto spojitého náhodného procesu s racionální spektrální hustotou pak bude

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t-u) dW(u)$$

Pro stacionaritu spojitého ARMA( $p, q$ ) procesu je třeba a stačí, aby kořeny  $\mu_j$  polynomu  $\mathcal{A}(z)$  měly všechny zápornou reálnou část. Spektrální hustota spojitého ARMA procesu je rovna

$$f(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{|\mathcal{B}(i\omega)|^2}{|\mathcal{A}(i\omega)|^2} = \frac{I_0}{2\pi} |\Theta(\omega)|^2 \quad (23)$$

kde  $I_0$  je intenzita vstupního bílého šumu.

Je vhodné poukázat na opačné pořadí koeficientů polynomu  $A(z)$  oproti pořadí koeficientů polynomu  $\mathcal{A}(z)$  vzhledem k obvyklému zápisu obou modelů. Tomuto úskalí se nevyhnula ani monografie (Priestley, 1981), kde je tvar polynomů  $\mathcal{A}(z)$  a  $\mathcal{B}(z)$  na str. 284 uveden chybně.

Na závěr této kapitoly budou pro další potřebu uvedeny tvary spektrálních hustot nejběžnějších ARMA modelů

1. Spojitý AR(2) model:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{I_0}{(\omega^2 - \alpha_0)^2 + \omega^2 \alpha_1^2} \quad (24)$$

2. Spojitý ARMA(2, 1) model:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(1 + \beta_1^2 \omega^2) I_0}{(\omega^2 - \alpha_0)^2 + \omega^2 \alpha_1^2} \quad (25)$$

3. Diskrétní AR(2) model:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_w^2}{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_2 \cos(2\Delta t \omega) + 2a_1(1 + a_2) \cos(\Delta t \omega)} \quad (26)$$



## 4. Diskrétní ARMA(2, 1) model

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(1 + b_1^2 + 2b_1 \cos(\Delta t\omega))\sigma_w^2}{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_2 \cos(2\Delta t\omega) + 2a_1(1 + a_2) \cos(\Delta t\omega)} \quad (27)$$

## 2 Analýza nestacionárních náhodných procesů

V následující kapitole je věnována pozornost především seizmogramům. Je-li záznam reálného zemětřesení brán jako náhodný proces, má jen ty nejhorší vlastnosti. Díky nestacionaritě není možno mluvit o ergodicitě. Každý záznam je jedinečný, není tedy k dispozici dostatečná množina realizací. Gaussovské rozložení pravděpodobnosti je problematické. Proto bude cílem této kapitoly navrhnout takové transformace naměřených dat, aby bylo možné pracovat se záznamy pomocí standardních postupů stochastické mechaniky, tedy jako se stacionárními procesy.

Autoři se v literatuře k podobné problematice dostávají dvojím přístupem. Jednak při syntéze náhodných seizmogramů a jednak při hledání stochastických řešení úloh, kde je seizmogram vstupem. Oba přístupy spolu souvisí a vzájemně se obohacují, proto jsou v dalším sledovány oba.

Analytické modely seizmogramů je možno zcela přirozeně dělit do čtyř skupin

1. Stacionární modely s konstantní spektrální hustotou (Housner, 1947; Rosenblueth, 1956; Bycroft, 1960; Goodman et al., 1955; Rosenblueth and Bustamante, 1962; Penzien, 1965; Ward, 1965)
2. Časově stacionární modely s proměnnou spektrální hustotou, která odpovídá pozorování skutečných zemětřesení (Kanai, 1957; Barstein, 1960; Caughey and Stumpf, 1960; Tajima, 1960; Housner and Jennings, 1964; Liu, 1968)
3. Nestacionární modely s konstantní spektrální hustotou (Bolotin, 1961; Shinozuka and Sato, 1967; Amin and Ang, 1968; Levy et al., 1971; Náprstek and Fischer, 1993; Zembaty and Krenk, 1994; Náprstek and Fischer, 1994; Náprstek and Fischer, 1998)
4. Zcela nestacionární modely (Goldberg et al., 1964; Rascon and Cornel, 1968; Kameda, 1975; Iyengar et al., 1969; Fischer C., 1999)

### 2.1 Analytické modely seizmogramů

Jako první modely se objevily stacionární modely založené na bílém šumu (Housner, 1947). Zde je akcelerogram idealizován jako řada impulsů o jisté velikosti, rozložených náhodně v čase. Týž autor v následném článku (Housner, 1955) uvažuje akcelerogram jako součet pulzů celých sinových vln náhodně rozložených v čase, jejichž frekvence a amplituda je brána podle vypočteného rozložení pravděpodobnosti.

**Stacionární modely** Bycroft (1960) uvádí výpočty (na analogovém počítači) ukazující, že response spectra (rychlosti) pro jednoduché elastické či elastoplastické oscilátory se pro vstupní procesy zemětřesení (akcelerogram) a bílý šum příliš neliší. Nicméně podotýká, že jakkoli simulaci prováděl několikrát pro (simulovaný) bílý šum se stejným energetickým obsahem (odpovídající stejné velikosti zemětřesení), výsledné posuny se pro jednotlivé simulace lišily desetkrát či více. Jinými slovy, že zemětřesení o stejné energii může mít zcela odlišné účinky na různé typy budov. Nepřímo tím poukazuje na slabiny jednoduchého modelu. Podobného přístupu užíval i E. Rosenblueth (Rosenblueth, 1956; Rosenblueth and Bustamante, 1962; Goodman et al., 1955).

Problémy, o nichž se Bycroft zmiňuje, je možno vysvětlit dvěma poznámkami. Předně, aby byl výsledek počítačových simulací reprezentativní, je zapotřebí provést *skutečně mnoho* pokusů. Druhá věc je, že odlišnost odezvy různých typů budov je vysvětlitelná náhodnou shodou některé převažující frekvence budicího signálu s vlastní frekvencí oscilátoru, kdy dochází k rezonančnímu zvětšení odezvy.

**Časově stacionární modely** Bogdanoff et al. (1961) modelovali akcelerogramy užitím nestacionárních procesů jako součet tlumených sinusoid.

Housner and Jennings (1964) rozvíjejí aproximační teorii uvedenou v (Rosenblueth and Bustamante, 1962) a modelují akcelerogramy jako úseky stacionárního gaussovského náhodného procesu se spektrální hustotou, známou jako Kanai-Tajimi spektrum (viz rovnici (48) na straně 30 této práce). Kladou zde důraz na automatizaci celého procesu generování umělých akcelerogramů na (digitálním) počítači.

Autoři si pochvalují dobrou shodu naměřených a simulovaných dat, nicméně poukazují na to, že naměřená data mají — na rozdíl od simulovaných — v rychlostech a posunech složky s periodou kratší než 0.3 sec. Vysvětlují to jednak chybou aproximace spektrální hustoty funkcí (48), a pak i nedostatečnou kvalitou seismologických záznamů. Pro rychlostní spektrum je v netlumeném případě shoda rovněž dobrá. Tlumená rychlostní spektra umělých záznamů však vykazují znatelně nižší hodnoty než příslušná tlumená spektra reálných záznamů.

**Frekvenčně stacionární modely** Levy et al. (1971) navrhují pro nestacionární model filtrované modulované stacionární procesy. Navrhují následující kritéria pro simulační procesy:

1. Autokovariance — normalizovaná autokovariance funkcí popisujících zrychlení základů (kdy předpokládáme stacionaritu po dobu trvání nejsilnějších pohybů) by měla vykazovat stejné charakteristiky, jaké byly odvozeny pro skutečná zemětřesení (např. Barstein (1960)).
2. Maximální zrychlení — simulovaná zemětřesení pro danou intenzitu by měla dosahovat obdobných hodnot maximálního zrychlení jako skutečná zemětřesení téže intenzity.
3. Spektrum odezvy — normalizované spektrum odezvy by mělo být podobné standardnímu spektru (Housner, 1959).
4. Nestacionarita — nestacionarita simulovaného pohybu by měla být podobná pozorováním. Především rozptyl rychlosti a zrychlení by měl (po dosažení maxima) s rostoucím časem klesat.

V článku autoři dále porovnávají tři modely seismických záznamů, a to modely uvedené v pracích (Housner and Jennings, 1964; Amin and Ang, 1968; Shinozuka and Sato, 1967). První patří do skupiny stacionárních modelů, druhý a třetí obsahují časovou modulaci. Model Shinozuky a Sato navíc zajišťuje, že nejen variance zrychlení, ale i variance rychlosti s časem klesá k nule. Nicméně, jak ukazují, žádný z nich nesplňuje zadaná kritéria. Proto autoři navrhují jiný přístup s využitím „korelovaných vstupních procesů“. Narozdíl od tří kritizovaných přístupů, které vesměs využívají buzení ve tvaru spojitého AR(2) procesu, navrhují použít plný spojitý ARMA(2, c) model podle definice (20)

$$X''(t) + \alpha_1 X'(t) + \alpha_0 X(t) = \int_0^c \exp\left(\frac{-Eu}{c}\right) w(t-u) du \quad (28)$$

případně jako modifikovaný proces spolu s modulační funkcí  $m(t) = (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$

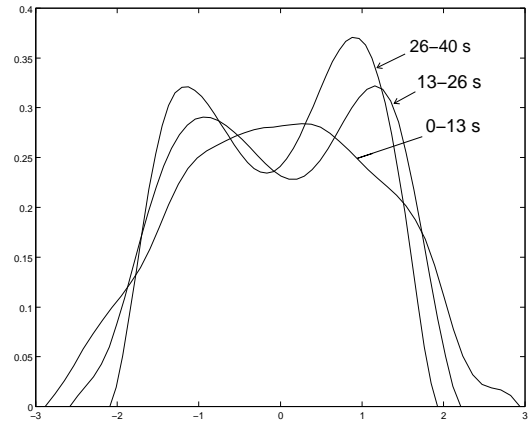
$$X''(t) + \alpha_1 X'(t) + \alpha_0 X(t) = m(t) \int_0^c \exp\left(\frac{-Eu}{c}\right) w(t-u) du$$

Model (28) pak splňuje všechny požadované podmínky.

**Zcela nestacionární modely** Zcela nestacionární modely jsou založeny na různých aproximacích evolučního výkonového spektra (evolutionary power spectra, EPS (Priestley, 1965, 1988)). Metodu generování náhodných procesů s daným EPS odvodil Shinozuka and Jan (1972). Liu (1970) provedl výpočty evolučních spekter pro některá silná zemětřesení a ukázal, že řada naměřených akcelerogramů má vsutku velmi proměnné spektrum. Kameda (1975) navrhl novou metodu výpočtu EPS pomocí *multifiltrů*.

## 2.2 Negaussovské modely

Je známo, narozdíl od častého předpokladu, že seizmogram jakožto náhodný proces není gaussovský. Obtíže spojené s prací s negaussovským náhodným procesem však zpravidla znemožní dosáhnout použitelného výsledku. Nicméně často se ukazuje, že právě (časová) oblast největší aktivity zemětřesení poměrně dobře gaussovská bývá. Na obrázku 1 je vykreslen odhad rozložení pravděpodobnosti hodnot pro tři úseky stacionarizované části záznamu posunutí zemětřesení Sierra Madre, viz obr. 4.



Obrázek 1: Histogram hodnot stacionarizované části záznamu seizmogramu

Negaussovské buzení (stejně jako odezva) je nutno popsat vyšším počtem momentů než pouze prvním a druhým, jako je tomu např. v (Lutes and Hu, 1986). Zde autor definuje negaussovský bílý šum se čtyřmi nenulovými momenty. Ten pak staví na pravou stranu lineární diferenciální rovnice druhého nebo čtvrtého řádu podle toho, jestli má představovat bílé nebo filtrované (AR(2)) buzení

## 2.3 Jednoduché rozklady typu $v(t) = m(t)v_s(t)$

Již dlouho se běžně používají rozklady

$$v(t) = m(t)v_s(t) \quad (29)$$

kde  $m(t)$  je deterministická funkce, která by měla být spojitá a kladná a  $u_s(t)$  je stochastická část signálu, která by měla být stacionární a gaussovská. První výskyty rozkladu je možno nalézt v (Bolotin, 1961) a (Shinozuka and Sato, 1967), dále s touto hypotézou pracovala řada autorů, např. Náprstek and Fischer (1994), Zembaty and Krenk (1994). Tvar (29) však zcela pomíjí nestacionaritu ve frekvenci. Takové zjednodušení je někdy možno akceptovat s poukazem na fakt, že dominantní skupina S vln u blízkých silných zemětřesení má spektrum společné. Ne vždy je však možné takové zjednodušení přijmout. Jako modulační funkce se v literatuře objevují různé návrhy.

**Skoková modulace** Prvním přiblížením nestacionárního charakteru zemětřesení je skokový začátek popsán pomocí Heavisideovy funkce se skokem v bodě  $t = 0$ .

$$m(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t \leq 0 \end{cases} \quad (30)$$

V článku (Amin and Ang, 1968) je časová modulace složena ze tří nespojitých funkcí — pro úvodní fázi, pro střední úsek o konstantní velikosti a pro doznívající klesající fázi.

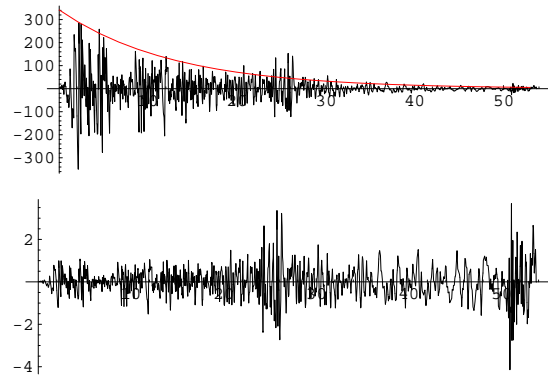
### Jednoduchá exponenciála

Jako jednoduché vylepšení modulační funkce (30) se užívá

$$m(t) = a h(t) e^{-\alpha t} \quad (31)$$

Je zcela nevyužitelná v okolí nuly, kde není diferencovatelná, ale pro svou jednoduchost je oblíbená. Přes své zásadní teoretické nedostatky může být dosti dobře použita pro rozklad některých akcelerogramů; za všechny např. záznam zrychlení Imperial Valley Earthquake (18. 5. 1940, 20:37) ze stanice El Centro, komponent N-S, může být aproximován modulační funkcí

$$m(t) = 341.7h(t)e^{-0.0782t} \quad (\text{viz obr. 2}).$$



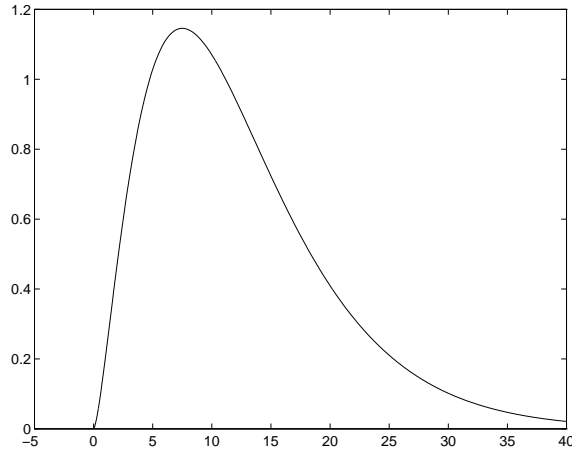
Obrázek 2: Záznam El Centro, modulační funkce  $m(t) = 341.7h(t) \exp(-0.0782t)$

### Složitější exponenciála

Saragoni and Hart (1974) odvodili, že kvadrát průměrného zrychlení působeného superpozicí velkého počtu nestacionárních vlnových pulsů má tvar modulační funkce

$$m(t) = a h(t) t^b e^{-\alpha t} \quad (32)$$

Na tuto funkci se odvolávají další autoři v souvislosti s generováním umělých akcelerogramů. Modulační funkce (32) však působí potíže při další analytické práci přítomností reálného exponentu  $b$ . Proto Náprstek and Fischer (1993) dávají přednost dvojitě exponenciální, pro niž byl odvozen původní tvar metody spektrálních rozkladů a korelační metody. Na obrázku 3 je vykreslena funkce  $0.25t^{1.5}e^{-0.2t}$ .



Obrázek 3: Modulační funkce (32)  $m(t) = 0.25t^{1.5} \exp(-0.2t)h(t)$

**Dvojitá exponenciála** Jednou z prvních prací, kde se objevuje jako modulační funkce dvojitá exponenciála, je článek prof. Shinozuky z roku 1967, viz (Shinozuka and Sato, 1967)

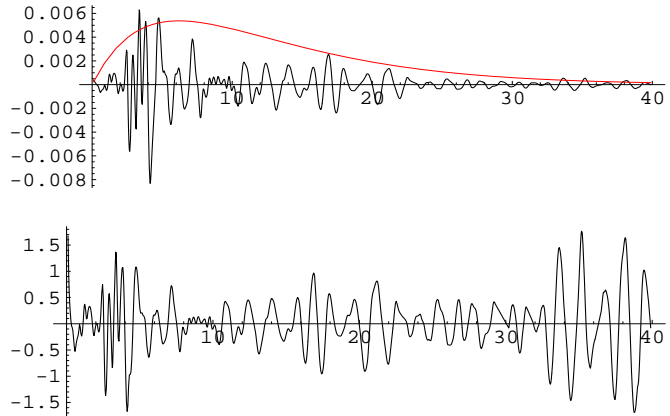
$$m(t) = a h(t) (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (33)$$

Má podobný tvar jako (32) a příjemnější vlastnosti při analytickém zpracování. Je schopna zachytit obvyklý náhlý nástup a pozvolný ústup zemětřesení. Selhává v případě, že nejsilnější nápor je poněkud opožděn nebo pokud signál obsahuje několik záznejů. Již z toho je vidět, že není tak vhodná pro záznamy posunutí.

Parametry  $a$ ,  $\alpha$  a  $\beta$  mohou být určeny minimalizováním odchylky ve smyslu metody nejmenších čtverců, nebo předepsáním pozice maxima  $t_{\max}$  a hodnoty v nějakém jiném bodě  $t_0$ , např. na konci. Je-li  $u(t)$  zkoumaný záznam, parametry  $a$ ,  $\alpha$  a  $\beta$  mohou být získány řešením soustavy

$$e^{-\alpha t_0} - e^{-\beta t_0} = \frac{u(t_0)}{\max_t u(t)} \quad \frac{\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\beta - \alpha} = t_{\max}$$

Pro příklad je možno uvést modulaci  $m(t) = 0.05(e^{-0.1389t} - e^{-0.1862t})$ , vypočtenou pro záznam posunutí při zemětřesení Sierra Madre 28. června 1991 zaznamenaný ve stanici Altadena – Eaton Canyon Park v epicentrální vzdálenosti 50 km, složka E-W. Spolu se záznamem a jeho stacionarizovanou částí je zobrazena na obrázku 4. Je vidět, že jak se modulace pro větší  $t$  blíží exponenciálně k nule, zesiluje ve stacionarizované části složky o nižších frekvencích, které při doznívání zemětřesení zpravidla převládají. To může výrazně zkreslit odhad spektrální hustoty.



Obrázek 4: Záznam zemětřesení Sierra Madre s modulační funkcí  $m(t) = .05(e^{-0.1389t} - e^{-0.1862t})h(t)$  a odpovídající stacionární proces

Výhodou doposud uvedených modulačních funkcí je, že pomocí několika málo parametrů poměrně dobře popíší charakter průběhu zemětřesné události. Jejich společnou nevýhodou je, že jejich tvar je předem dán a neopouští prostor pro variabilitu seizmických událostí. Výsledná stacionarizovaná část pak mívá do stacionarity daleko. Modulační funkce (32), (33) byly navrženy s ohledem na akcelerogramy a není vždy možné je rozumně aplikovat na záznam posunutí. Proto je potřeba ve většině případů používat modulační funkce složitější.

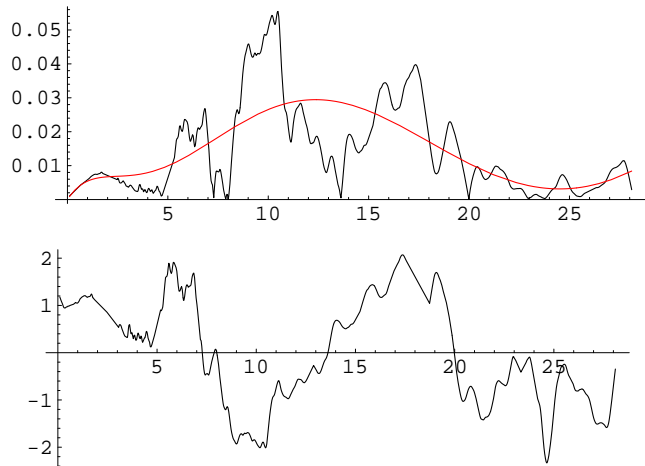
**Násobná exponenciála** Předcházející případ může být jednoduchým způsobem rozšířen do tvaru

$$m(t) = \sum_{i=1}^n ah(t - t_i) \left( e^{-\alpha_i(t-t_i)} - e^{-\beta_i(t-t_i)} \right) \quad (34)$$

Taková modulace může lépe postihnout záznam v signálu a někteří autoři ji doporučují. Bohužel, v případě, kdy je některý z  $t_i$  nenulový, není modulace (34) spojitě diferencovatelná. Pokud všechny  $t_i$  zůstanou nulové, její schopnost aproximovat záznam se výrazně zmenší.

**Dvojitá exponenciála s polynomem** Na obrázku 5 je vidět, že dvojitě exponenciální modulace (33) může být úspěšně obohacena o násobný polynom

$$m(t) = h(t)(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \sum_{i=0}^n c_i \cdot t^i$$



Obrázek 5: Záznam posunutí zemětřesení Joshua Tree, 23.4.1992, komponent SE–NW, epic. vzdálenost 14 km s modulační funkcí (35) a stacionární proces

jak navrhl autor v (Náprstek and Fischer, 1998). Taková modulace je poměrně přesná a oproti (34) je znatelně jednodušší. Její nevýhodou je fakt, že polynomiální aproximace je nekontrolovatelná mimo interval  $\langle 0, T \rangle$ , na němž je záznam k dispozici. To, že polynom rychle roste za hranicemi intervalu, může působit teoretické obtíže při studiu asymptotického chování řešení rovnic. Záznam na obrázku 5 pochází ze zemětřesení Joshua Tree. Obrázek

ukazuje záznam posunutí spolu s modulací

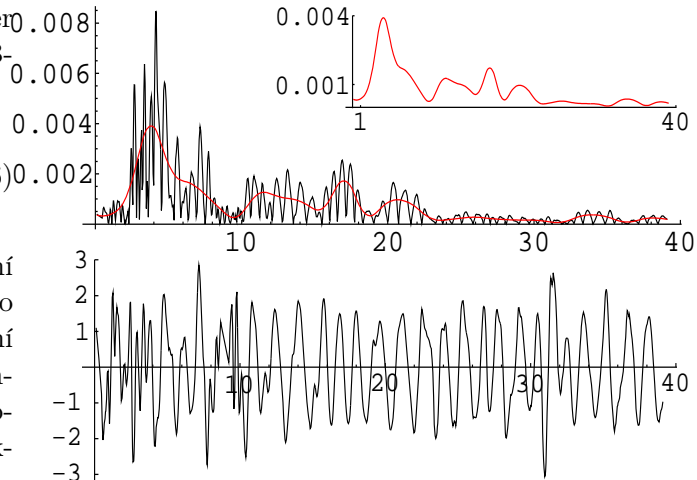
$$m(t) = 2.93(e^{-0.1098t} - e^{-0.112t}) \sum_{i=0}^5 c_i \cdot t^i \quad (35)$$

kde  $c_5, \dots, c_0 = -1.14 \times 10^{-5}, 1.79 \times 10^{-4}, -0.0075, 0.11, -0.59, 1.423$  a stacionarizovanou část.

**Splajnová modulace** Jako alternativu k výše uvedeným modulacím autor v práci (Náprstek and Fischer, 1998) navrhl užit jako modulace B-spline funkcí:

$$m(t) = \sum_{i=0}^n \zeta_i B^{[N]}(t - t_i) \quad (36)$$

B-spline je po částech polynomiální funkce s kompaktním nosičem, proto je dobře schopna zachytit lokální změny v průběhu signálu. Konstrukce splajnů zajišťuje potřebnou spojitost funkce včetně některých derivací. Podrobná monografie, zabývající se nejrůznějšími typy splajnů je (de Boor, 1987).



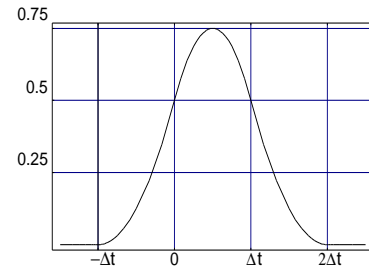
Obrázek 6: Nahoře záznam absolutních hodnot posunutí zemětřesení Sierra Madre, dole odpovídající stacionarizovaná část, ve výřezu modulační funkce

Při použití básových polynomů nízkých stupňů (například kvadratických), bude jejich algebraické vyjádření poměrně jednoduché. Jako příklad užití B-splajnové modulační funkce je na obrázku 6 opět uveden záznam zemětřesení Sierra Madre (28. června 1991) zaznamenaný ve stanici Altadena – Eaton Canyon Park. V tomto případě tvoří modulační funkci kvadratický splajn s 27 úseky stejné délky. Z porovnání obou stacionarizovaných signálů na obrázcích 4 (strana 20) a 6 je zřejmá rozdílná účinnost modulačních funkcí typu (33) a (36).

Volba stupně polynomů (a tudíž i hladkosti výsledné funkce) je spíše záležitostí vkusu než hluboké teorie. Jisté je, že pro stupeň  $N > 2$  bude splajnových koeficientů mnoho a práce se složitějším vyjádřením bude neúměrně narůstat. Připomeňme, že při vyjadřování druhých stochastických momentů vystupuje modulační funkce ve druhé mocnině. Na druhou stranu zkoumané diferenciální rovnice zahrnují derivaci modulace, není tedy vhodné používat po částech konstantní modulaci ( $N = 0$ ). Zbývá tedy poměrně úzká volba. Konečné rozhodnutí však bude záviset na aplikaci.

Po částech kvadratický B-splajn na intervalu  $\langle -\Delta t, 2\Delta t \rangle$  je definován jako (pro jednoduchost uvažujeme jednotnou délku kroku  $\Delta t$ , viz obr. 7)

$$B^{[2]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2} \frac{1}{2} (t + \Delta t)^2 & -\Delta t \leq t \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta t^2} \left( \frac{3}{4} - (t - \frac{1}{2}\Delta t)^2 \right) & 0 \leq t \leq \Delta t \\ \frac{1}{\Delta t^2} \frac{1}{2} (t - 2\Delta t)^2 & \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (37)$$



Obrázek 7: Kvadratický B-splajn

a koeficienty  $\zeta_i$  v (36) lze získat řešením lineární soustavy

$$\sum \langle B_i^{[2]}, B_j^{[2]} \rangle \zeta_j = \langle B_i^{[2]}, v \rangle, \text{ pro } i = 0, \dots, n \quad (38)$$

kde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zastupuje vhodný skalární součin. Výsledná (Grammova) matice bude mít 5 nenulových diagonál

$$\left( \dots, 0, \frac{1}{120} \Delta t, \frac{13}{60} \Delta t, \frac{11}{20} \Delta t, \frac{13}{60} \Delta t, \frac{1}{120} \Delta t, 0, \dots \right)$$

Někdy je vhodnější pracovat namísto s koeficienty celkových B-splajnů s lokálními koeficienty jednotlivých polynomů pro daný interval. A jakkoli není přepočítání mezi jednou či druhou reprezentací nikterak obtížné a v publikaci (de Boor, 1987) jsou popsány algoritmy pro výpočet nejrůznějších splajnů, uvedeme zde algoritmy pro výpočet splajnových koeficientů v obou reprezentacích.

**Koeficienty kvadratických B-splajnů** Zobecnění rovnice (37) pro body  $t_i, \dots, t_{i+3}$  má tvar

$$B_i^{[2]}(t) = \begin{cases} -\frac{3(t-t_i)^2}{(t_i-t_{i+1})(t_i-t_{i+2})(t_i-t_{i+3})} & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ \frac{6tt_it_{i+1} - 3t^2(t_i+t_{i+1}-t_{i+2}) - 3t_it_{i+1}t_{i+2}}{(t_{i+1}-t_{i+2})(t_{i+2}-t_i)(t_i-t_{i+3})(t_{i+1}-t_{i+3})} + \\ + \frac{3(t^2 - t_it_{i+1} + 2tt_{i+2} + (t_i+t_{i+1})t_{i+2})t_{i+3}}{(t_{i+1}-t_{i+2})(t_{i+2}-t_i)(t_i-t_{i+3})(t_{i+1}-t_{i+3})} & t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2} \\ -\frac{3(t-t_{i+3})^2}{(t_{i+3}-t_i)(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})} & t_{i+2} \leq t \leq t_{i+3} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Při výpočtu Grammovy matice na levé straně soustavy (38) není vhodné chápat skalární součin  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jako integrál v prostoru  $\mathcal{L}^2$ . Přestože je pro prvky Grammovy matice možné napsat přesné explicitní formule, koeficienty pravé strany je nutno zpravidla počítat numericky a kombinace dvou různých interpretací skalárního součinu vede k chybným výsledkům. Skalární součiny na obou stranách rovnice (38) je proto nutno vyčísřit numericky.

**Koeficienty po částech kvadratických polynomů** Algoritmus pro výpočet koeficientů kvadratického splajnu s obecnou délkou kroku je možno odvodit s využitím Lagrangeovy věty o vázaných extrémech.

Budiž zadána množina bodů  $x_{j,k}$  a jim odpovídajících hodnot  $f_{j,k}$ . Index  $j$  odpovídá hrubému dělení (jednotlivým úsekům splajnu), index  $k$  pak jemnému dělení pro všechny hodnoty  $f$ . Hledáme po částech kvadratický polynom, jenž nejlépe aproximuje zadané hodnoty za podmínky, že jednotlivé úseky na sebe budou spojitě navazovat.

Minimalizovaná funkce bude mít tvar

$$\sum_{j,k} (f_{j,k} - (a_j x_{j,k}^2 + b_j x_{j,k} + c_j))^2$$

Vázací podmínka pak bude

$$g_j(x) = a_j x_{j,n_j}^2 + b_j x_{j,n_j} + c_j - a_{j+1} x_{j+1,1}^2 - b_{j+1} x_{j+1,1} - c_{j+1}$$

kde  $n_j$  je počet uzlů jemného dělení subintervalu  $j$ . Pro druhý okraj intervalu sestavíme podobnou podmínku. A rovněž podobně je možné předepsat spojitost derivací. Pro  $j$ -tý



interval budou nutné Lagrangeovy podmínky následující

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_{j,1}^2 + \lambda_2 x_{j,n}^2 - \sum_{k=1}^{n_j} (a_j x_{j,k}^2 + b_j x_{j,k} + c_j) x_{j,k}^2 &= 0 \\ \lambda_1 x_{j,1} + \lambda_2 x_{j,n} - \sum_{k=1}^{n_j} (a_j x_{j,k}^2 + b_j x_{j,k} + c_j) x_{j,k} &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \sum_{k=1}^{n_j} (a_j x_{j,k}^2 + b_j x_{j,k} + c_j) &= 0 \\ a_j x_{j,1}^2 + b_j x_{j,1} + c_j &= z_{j,1} \\ 2a_j x_{j,n_j} + b_j &= z_{j,2} \end{aligned}$$

Symboly  $z_{j,1}$  a  $z_{j,2}$  vyjadřují podmínky spjitosti hodnot a derivací. Je-li  $m$  splajnových intervalů, je třeba určit  $3m$  koeficientů a  $2m$  Lagrangeových multiplikátorů. K tomu je k dispozici  $3m$  podmínek z nejmenších čtverců,  $m - 1$  podmínka na spjitost funkce a rovněž  $m - 1$  podmínka na spjitost derivace, zbývají tedy dvě volné okrajové hodnoty.

Bez újmy na obecnosti je možno mapovat každý interval interpolace na interval  $\langle 0, 1 \rangle$  a položit  $\hat{x}_{j,1} = 0$  a  $\hat{x}_{j,n_j} = 1$ . Rovnice pro jeden úsek bude vypadat následovně

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^4 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^3 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^2 \\ 0 & 1 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^3 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^2 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k} \\ 1 & 1 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^2 & 2 \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k} & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \hat{a}_j \\ \hat{b}_j \\ \hat{c}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{k=1}^{n_j} y_{j,k} \hat{x}_{j,k}^2 \\ 2 \sum_{k=1}^{n_j} y_{j,k} \hat{x}_{j,k} \\ 2 \sum_{k=1}^{n_j} y_{j,k} \\ z_{j,1} \\ z_{j,2} \end{pmatrix}$$

Celková matice bude mít blokový tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{3m \times 2m} & \mathbf{B}_{3m \times 3m} \\ \mathbf{0}_{2m \times 2m} & \mathbf{D}_{2m \times 3m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}$$

kde podmatice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{D}$  budu blokově diagonální s  $m$  bloky  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ , resp.  $\mathbf{D}_i$  na diagonálách,  $\mathbf{z}_1$  bude vektor Lagrangeových multiplikátorů a  $\mathbf{z}_2 = (\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \dots, \hat{a}_m, \hat{b}_m, \hat{c}_m)^\top$  bude vektor hledaných neznámých. Na pravé straně vektor  $\mathbf{r}_1$  je tvořen trojicemi  $\mathbf{r}_{1,i}$  a vektor  $\mathbf{r}_2$  je nulový, kde

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = 2 \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^4 & \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^3 & \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^2 \\ \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^3 & \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^2 & \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k} \\ \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k}^2 & \sum_{k=1}^{n_j} \hat{x}_{j,k} & n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{i,i \neq 1, m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,i} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n_j} y_{j,k} \hat{x}_{j,k}^2 \\ \sum_{k=1}^{n_j} y_{j,k} \hat{x}_{j,k} \\ \sum_{k=1}^{n_j} y_{j,k} \end{pmatrix}$$

Matice  $\mathbf{D}_i$  se skládají tak, že v každém blokovém sloupci je právě jedna, druhá začíná o řádek níže než první a každá další o dva řádky níže než předchozí. První a poslední člen vektoru  $\mathbf{r}_2$  má význam hodnoty splajnu na koncích, resp. derivace, pokud se upraví matice  $\mathbf{D}_1$  a  $\mathbf{D}_m$ . Konečně globální splajnové koeficienty pro  $j$ -tý úsek splajnu  $a_j x^2 + b_j x + c_j$  se vypočtou ze vztahů

$$a_j = \frac{\hat{a}_j}{x_{j,n_j} - x_{j,1}}, \quad b_j = \frac{\hat{b}_j x_{j,n_j} - (2\hat{a}_j + \hat{b}_j) x_{j,1}}{(x_{j,n_j} - x_{j,1})^2}, \quad c_j = \hat{a}_j \left( \frac{x_{j,1}}{x_{j,n_j} - x_{j,1}} \right)^2 + \hat{b}_j \frac{x_{j,1}}{x_{j,n_j} - x_{j,1}} + \hat{c}_j$$

**Volba uzlů aproximace** V ideálním případě by bylo dobré mít po ruce automatickou proceduru, která umístí uzly aproximace (hranice intervalů pro jednotlivé polynomiální úseky) automaticky tak, aby výsledný proces byl „co nejstacionárnější“. Neměl by být problém sestavit příslušnou penalizační funkci a použít numerickou minimalizaci k řešení uvedeného

problému. Existují však důvody zpochybňující výhodnost takového řešení. Předně, numerické metody, zejména metoda korelační, jsou pro rovnoměrné dělení výrazně rychlejší. Za druhé, při (případném) použití splajnových koeficientů ke kategorizaci seizmogramů je vhodné pro zachování konzistence jednotlivých popisů požadovat homogenitu dělení. Proto v příkladech rozkladů seizmogramů uváděných v příloze upřednostňujeme rovnoměrné dělení

## 2.4 Rozklady pro nestacionární spektrum

Jak již bylo zmíněno, stacionární část signálu  $u_s$  z rovnice (29), získaná rozklady předchozího, odstavce bývá v nejlepším případě stacionární v čase, nikoli však ve frekvenci. Proto je dále navrženo takové zobecnění rozkladů, aby se stacionarita získaných procesů zlepšila.

Jak bylo řečeno výše, obecným nástrojem pro zpracování nestacionárních procesů je evoluční spektrální analýza (Priestley, 1988). Jejím základem je časově proměnná varianta spektrálního rozkladu

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t, \omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (39)$$

kde  $dZ(\omega)$  je spektrální diferenciál stacionární části a  $m(t, \omega)$  bude modulace nyní závislá na čase i frekvenci. V reálném případě však vždy bude nutné integrál (39) aproximovat nějakým součtem.

Uvažme původní signál  $v$  jako kombinaci modulací a úzkofrekvenčních náhodných signálů

$$v(t) = \sum_{i=1}^N m_i(t) \cdot v_{si}(t) \quad (40)$$

kde  $m_i(t)$  budou modulace například tvaru (36) a  $v_{si}$  stacionární náhodné signály s „úzkou“ spektrální hustotou. Takového rozkladu je možno dosáhnout například pomocí waveletové multiresolution analysis, kdy s rostoucím  $i$  se dvojnásobí šířka spektra  $v_{si}$ .

### 2.4.1 Rozklady využívající evoluční spektrum

Na základě teorie sigma oscilujících procesů definoval (Conte and Peng, 1997) zcela nestacionární model zemětřesení. Jeho myšlenka je hodně podobná víceúrovňovému rozkladu uvedenému níže, jakkoli oba postupy vznikly zcela nepochybně nezávisle.

Pro akcelerogram  $\ddot{u}(t)$  Conte zavádí

$$\ddot{u}(t) = \sum_{k=1}^p X_k(t) = \sum_{k=1}^p A_k(t) v_k(t)$$

kde  $A_k$  je časová modulace

$$A_k(t) = \alpha_k (t - \zeta_k)^{\beta_k} e^{-\gamma_k (t - \zeta_k)} h(t - \zeta_k) \quad (41)$$

(připomeňme, že modulace (41) odpovídá modulaci (32)) a  $v_k$  je centrováný gaussovský náhodný proces charakterizovaný autokorelační funkcí  $K_{v_k v_k}$  a spektrální hustotou  $\Psi_{v_k v_k}$

$$K_{v_k v_k}(\tau) = e^{-\nu_k |\tau|} \cos(\eta_k \tau) ; \quad \Psi_{v_k v_k}(\omega) = \frac{\nu_k}{2\pi} \left( \frac{1}{\nu_k^2 + (\omega + \eta_k)^2} + \frac{1}{\nu_k^2 + (\omega - \eta_k)^2} \right) \quad (42)$$

Spektrální hustota (42) je spektrální hustotou spojitého ARMA(2, 1) procesu (22) s koeficienty

$$\alpha_1 = 2\nu_k, \quad \alpha_0 = \eta^2 + \nu^2, \quad \beta_1 = \frac{1}{\eta^2 + \nu^2}, \quad I_0 = 2\nu(\eta^2 + \nu^2)$$

Stacionární procesy  $v_k$  jsou normalizovány tak, aby měly jednotkovou varianci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{v_k v_k}(\omega) d\omega = K_{v_k v_k}(0) = \mathbb{E} |v_k|^2 = 1$$

Navrhovaný stochastický model akcelogramu  $\ddot{u}(t)$  tvaru

$$\ddot{u}(t) = \sum_{k=1}^p X_k(t) = \sum_{k=1}^p A_k(t) v_k(t)$$

má pak varianci

$$\mathbb{E} |\ddot{u}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^p |A_k(t)|^2 \Psi_{v_k v_k}(\omega) d\omega = \sum_{k=1}^p |A_k(t)|^2$$

a evoluční spektrální hustota  $\ddot{u}(t)$  je

$$\Phi_{\ddot{u}\ddot{u}}(\omega) = \sum_{k=1}^p |A_k(t)|^2 \Psi_{v_k v_k}(\omega) \quad (43)$$

Po  $Z_k(\omega)$  se rovněž požaduje, aby

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} dZ_k(\omega_1) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} dZ_l(\omega_2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-l) \delta(\omega_1 - \omega_2) \Psi_{Z_k Z_l}(\omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-l) \Psi_{Z_k Z_l}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

a

$$\mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} dZ_k(\omega) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, p$$

Tedy každý člen součtu (14) má evoluční spektrum tvaru

$$\Psi_{X_k X_l}(t, \omega) = |A_k(t, \omega)|^2 \Psi_{Z_k Z_l}(t, \omega)$$

Variance procesu  $Y(t)$  (14) je

$$\mathbb{E} |Y(t)|^2 = \sum_{k=1}^p \mathbb{E} |X_k(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^p |A(t, \omega)|^2 \Psi_{Z_k Z_k}(\omega) d\omega$$

a evoluční spektrum procesu  $Y(t)$  pak bude

$$\Psi_{YY}(t, \omega) = \sum_{k=1}^p |A_k(t, \omega)|^2 \Psi_{Z_k Z_l}(t, \omega)$$

### 2.4.2 Víceúrovňové rozklady

Základní myšlenkou víceúrovňových rozkladů je možnost rozložit původní záznam na součet procesů s omezeným a vzájemně disjunktním frekvenčním obsahem. V takovém případě je pak možno pokládat změny spektrální hustoty jednotlivých složek v čase za zanedbatelné. Jako další krok je pak možno každý člen součtu rozložit pomocí rozkladu (29), nejlépe se splajnovou modulací (36). Při následných výpočtech pak navíc bude někdy nutno předpokládat, že jsou jednotlivé složky nekorelované, neboť při zahrnutí vzájemných korelací jednotlivých frekvenčních složek by neúměrně vzrostla složitost algoritmů. Že jde o předpoklad vcelku oprávněný, bude ukázáno níže.

Podle naznačeného postupu tak lze psát rozklad ve tvaru

$$v(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) = \sum_{i=1}^n m_i(t) v_{0i}(t) \quad (44)$$

Prakticky je možné rozklad provést několika způsoby. Nejjednodušší vychází z linearity Fourierovy transformace a užívaných odhadů spektrální hustoty: neboť  $(\mathcal{F}v)(\omega) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{F}v_i)(\omega)$ , platí analogický vztah (přibližně) pro spektrální hustotu. (Symbol  $\mathcal{F}$  je užit pro Fourierovu transformaci). Bere-li se totiž periodogram (4) jako základ odhadů spektrální hustoty, bude

$$I_{c,v(t)}(\omega) = \frac{1}{2T} (\mathcal{F}v)(\omega) \cdot \overline{(\mathcal{F}v)(\omega)} = \frac{1}{2T} \sum_{i,j=1}^n (\mathcal{F}v_i)(\omega) \cdot \overline{(\mathcal{F}v_j)(\omega)}$$

Protože rozklad (44) má zaručit, aby jednotlivé  $v_i(t)$  měly výlučný frekvenční obsah, budou

$$(\mathcal{F}v_i)(\omega) \cdot \overline{(\mathcal{F}v_j)(\omega)} \approx 0 \quad \text{pro } i \neq j \quad (45)$$

a vzájemná spektrální hustota (a tedy i korelace) jednotlivých složek rozkladu bude malá. Proto bude přibližně platit

$$I_{c,v(t)}(\omega) \approx \frac{1}{2T} \sum_{i=1}^n (\mathcal{F}v_i)(\omega) \cdot \overline{(\mathcal{F}v_i)(\omega)} = \sum_{i=1}^n I_{c,v_i(t)}$$

Jednoduchý rozklad může být tedy definován následující podmínkou:

$$\mathcal{F}v_i(\omega) = \mathcal{F}v(\omega) \chi_{(\omega_{i-1}, \omega_i)}(\omega) \quad (46)$$

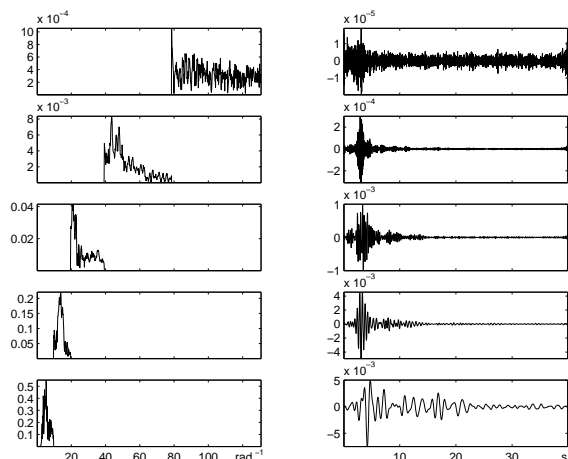
kde  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_n$  je vhodné rozdělení požadovaného frekvenčního intervalu a  $\chi_J$  je obdélníkové okno či charakteristická funkce intervalu  $J$  (tzn.  $\chi_J(\omega) = 1$  pokud  $\omega \in J$  a  $\chi_J(\omega) = 0$  jinak). V tom případě budou jednotlivá spektra skutečně diskrétní a vztah (45) bude platit přesně. Nicméně toto jednoduché řešení má své nedostatky, ostré hrany obdélníkového okénka totiž deformují odhady spektrální hustoty. Namísto uvedeného okna  $\chi_J(\omega)$  je pochopitelně možno použít jakékoli jiné okno  $\phi_i(\omega)$  splňující  $\sum_{i=1}^n \phi_i(\omega) = 1$ .

Již zmíněná multiresolution analysis (viz (Daubechies, 1992; Malat, 1989)) nabízí sofistikovanější přístup k problému víceúrovňových rozkladů. Tato technika, úzce související s teorií waveletů, spočívá v aplikaci posloupnosti speciálních filtrů. Je možno ji schematicky napsat ve tvaru

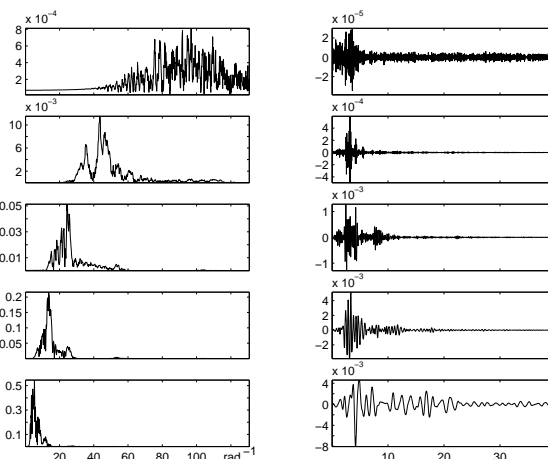
$$v(t) \longleftarrow (\mathbf{G}v, \mathbf{G}\mathbf{H}v, \dots, \mathbf{G}\mathbf{H}^{n-1}v, \mathbf{H}^n v) = (v_1, \dots, v_n)$$

kde  $\mathbf{G}, \mathbf{H}$  jsou filtry horní a dolní propusti. Výsledná posloupnost obsahuje  $n - 1$  vysokofrekvenčních detailů  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  a nízkofrekvenční aproximaci  $v_n$ . Součet všech komponent  $\sum_{i=1}^n v_i$  je roven původnímu signálu. Teorie waveletů a multiresolution analysis je značně rozsáhlá a je jí věnována řada monografií, není tedy třeba se zatím pouštět do dalších podrobností.

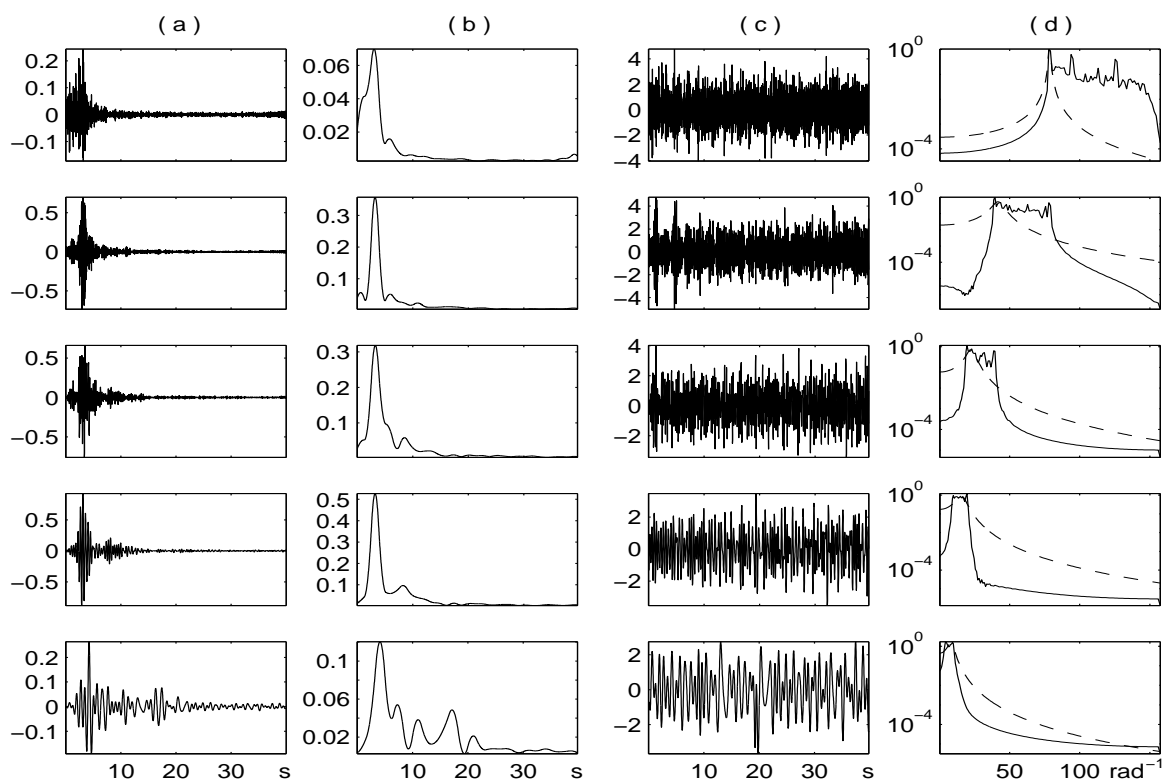
Na obrázcích 8 a 9 je vykreslen víceúrovňový rozklad již známého záznamu posunutí zemětřesení Sierra Madre pomocí rozkladu řezanou Fourierovou transformací (46) (obrázek 8) a waveletovou multiresolution analysis (obrázek 9). Vždy v levém sloupci je pro jednotlivé složky rozkladu zobrazeno spektrum, v pravé části pak časový průběh aproximací.



Obrázek 8: Víceúrovňový rozklad získaný rozdělením Fourierova spektra



Obrázek 9: Víceúrovňový rozklad získaný waveletovou multiresolution analysis



Obrázek 10: Kompletní analýza seizmogramu pomocí waveletové multiresolution analysis.

(a) úzkopásmový detail, (b) modulační funkce, (c) stacionarizovaná část, (d) spektrální hustota (plná čára) a AR(2) aproximace (čárkovaně)

Na obrázku 10 je opět seizmogram Sierra Madre, tentokrát rozložený waveletovou multiresolution analysis. V jednotlivých řádcích jsou ukázány (odshora) vysokofrekvenční zbytek a čtyři nízkofrekvenční aproximace, odpovídající jednotlivým částem spektra. V sloupci (a) to je vždy odpovídající rozložená část, ve sloupci (b) splajnová modulační funkce (splajn s rovnoměrným dělením na 25-30 úseků). Ve sloupci (c) je ukázána stacionarizovaná část složky a jako poslední následuje vypočtená spektrální hustota stacionarizované části (plná čára) spolu s AR(2) aproximací (čárkovaně). Pro výpočet byla použita waveletová báze typu Daubechies řádu 8, k výpočtům byl použit toolbox Uvi\_Wave (1996) pro MATLAB<sup>®</sup>.

Seizmogram vybraný pro obrázek 10 je poměrně netypický. U drtivé většiny dalších seizmogramů byla první aproximace (odpovídající nejnižším frekvencím) silně dominantní,

každá vyšší pak měla řádově menší amplitudy než předcházející. V souladu s tím se pak jeví výsledky dalších výpočtů, kdy byl takový rozklad použit jako buzení testovací konstrukce: účinky vyšších složek buzení byly nicotné v porovnání s účinky první složky. Jako závěr můžeme tedy říci, že při zachování jisté dávky opatrnosti je možno považovat seismické záznamy za frekvenčně stacionární.

### 3 Aproximace spektrální hustoty

Většina metod řešení stochastických rovnic vyžaduje znalost explicitního tvaru spektrální hustoty stacionární části buzení. Snad jediné simulační metody typu Monte Carlo jsou schopny pracovat s úplně obecným tvarem spektrální hustoty. Předpoklad o určitém tvaru spektrální hustoty buzení se v metodách objevuje buď jako explicitně zadaná funkce, nebo jako diferenciální filtr, o který je rozšířena rovnice soustavy, nebo formou předpisu buzení jako ARMA modelu. Ve skutečnosti jsou všechny tyto formy zpravidla ekvivalentní, v drtivé většině jde o buzení ARMA( $p, q$ ) modelem nízkého řádu,  $p, q \leq 2$ . Je to pochopitelné, neboť racionální tvar spektrální hustoty spojitého ARMA modelu je vhodný k teoretické práci a diferenční schema diskretních ARMA modelů se hodí do rekurentních numerických metod. Shoda s naměřenými seizmogramy bývá také uspokojivá. Seizmologové však často dávají přednost složitějším fyzikálním modelům, viz např. (Boore, 1983).

**AR(2) spektrum** Ve své klasické monografii (Bolotin, 1961) uvažuje autor spektrální hustotu ve tvaru

$$\psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{2a^2b}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \quad (47)$$

což je spektrální hustota spojitého AR(2) modelu. Hodnota  $\sigma^2$  je přímo rozptyl výsledného procesu, neboť

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) = \sigma^2$$

Naopak, proces se spektrální hustotou (47) dostaneme jako řešení diferenciální rovnice popisující tlumené kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti:

$$\ddot{y}(t) + 2b\dot{y}(t) + a^2y(t) = w(t)$$

kde  $w(t)$  je bílý šum o intenzitě

$$I_0 = \frac{2a^2b\sigma^2}{\pi}$$

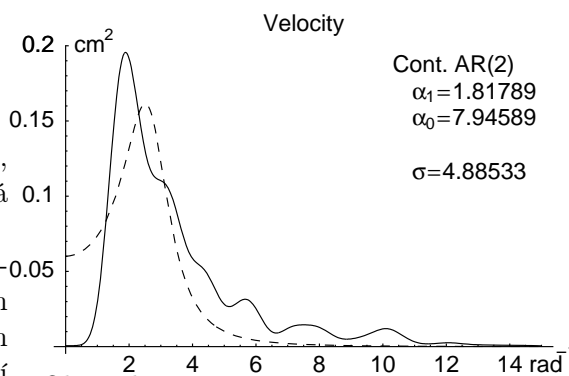
Lze si tedy (s jistou nadsázkou) představovat, že se podloží pod základem konstrukce chová jako tlumený oscilátor.

Funkce  $\psi(\omega)$  (47) má pro  $a > \sqrt{2}b$  maximum v  $\omega = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}$  a lokální minimum v 0. Pro  $a \leq \sqrt{2}b$  má jediné maximum v nule. Parametr  $b$  určuje šířku vyčnívající části v případě dvojice maxim. Na obrázku 11 je vykreslena AR(2) aproximace spektrální hustoty stacionarizované části velocigramu zemětřesení Big Bear, 28. 6. 1992 ze stanice San Bernardino E. & Hospitality.

Tato aproximace byla využita při odvození metody spektrálních rozkladů i korelační metody, viz (Náprstek and Fischer, 1993, 1994, 1995) nebo dále v této práci.

Koeficienty vyjádření (47) odpovídají koeficientům klasické formulace spojitého AR(2) (rovnice (22)) pomocí transformace

$$\alpha_0 = a^2, \quad \alpha_1 = 2b, \quad I_0 = 2a^2b\sigma^2$$



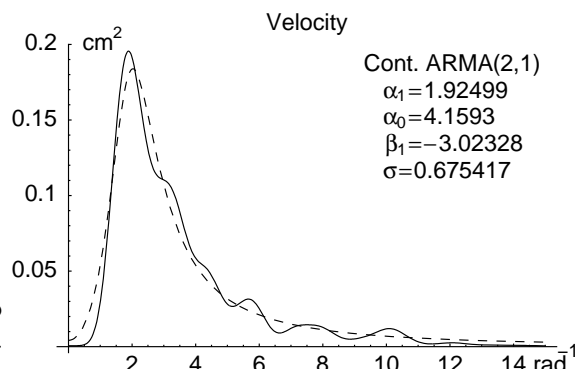
Obrázek 11: Spektrální hustota velocigramu zemětřesení Big Bear (plná čára) a spojitého AR(2) procesu (čárkovaně). Směr záznamu je E-W, epicentrální vzdálenost 42km.

**Kanai-Tajimi spektrum** Jinou klasickou a v literatuře užívanou náhradou spektra je ARMA(2, 1) model, který odvodil Tajima (1960) podle práce (Kanai, 1957)

$$G(\omega) = \frac{G_0 \left(1 + 4b^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 + 4b^2 \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (48)$$

$$= \frac{G_0 c^2 (c^2 + 4b^2 \omega^2)}{(c^2 - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega^2 c^2}$$

kde  $\sigma^2$ ,  $b$ ,  $c$  jsou konstanty určené tak, aby tato  $G(\omega)$  aproximovala rychlostní spektrum podle skutečného velocigramu v nějakém rozumném rozsahu frekvencí. Jako příklad poslouží obrázek 12, který uvádí aproximaci spektrální hustoty výše uvedeného záznamu spektrální hustotou spojitého ARMA(2,1) modelu.



Obrázek 12: Spektrální hustota velocigramu zemětřesení Big Bear (plná čára) a spojitého ARMA(2, 1) procesu (čárkovaně). Základem je stejný záznam jako na obr. 11

Náhodný vzorek o spektrální hustotě (48) pak získáme filtrací (konvolucí) bílého šumu o jednotkové spektrální hustotě filtrem s přenosovou funkcí

$$h(\tau) = \sqrt{a} \left( \frac{c\sqrt{1-2b^2}}{\sqrt{1-b^2}} e^{-bc\tau} \sin(c\sqrt{1-b^2}\tau) + 2bce^{-bc\tau} \cos(c\sqrt{1-b^2}\tau) \right)$$

Jinými slovy, Kanai-Tajimi spektrum (48) odpovídá spektrální hustotě spojitého ARMA(2, 1) modelu (22) s koeficienty

$$\alpha_0 = c^2, \quad \alpha_1 = 2bc, \quad \beta_0 = c^2, \quad \beta_1 = 4b^2c^2, \quad I_0 = 2\pi G_0$$

Parametry Kanai-Tajimi spektra se udávají pro různá podloží, viz např. tabulku 1, jakkoli je třeba vždy hodnoty upravit podle síly předpokládaného zemětřesení. Varianty tohoto spektra navrhli různí další autoři, za všechny uveďme (Clough and Penzien, 1993).

podloží	$G_0$	$b$	$c$
naplavenina	0.102	0.34	18.4
skála	0.07	0.34	27.0

Tabulka 1: Příklad parametrů spektra (48)

Spektrální hustoty a aproximace na obrázcích 11 a 12 nelze považovat za reprezentativní či typické vzorky. Ve skutečnosti bývá shoda mezi naměřeným spektrem a aproximací podstatně horší. Na základě zkoumaných záznamů nemůžeme ani potvrdit, že by byl model AR(2) vhodný výhradně pro záznam zrychlení a ARMA(2, 1) výhradně pro rychlost. Vhodnost toho kterého modelu pro posun, rychlost či zrychlení záznamů se liší od případu k případu, jak může být vidět na analýzách seizmogramů uvedených v příloze. Jediné, co můžeme potvrdit, je přirozený fakt, že model ARMA(2, 1) se lépe hodí pro proces, pro jehož derivaci se lépe hodí model AR(2).

**Spektra pro diskrétní ARMA procesy** Většina teoretických modelů je odvozena s využitím spojitých ARMA modelů. Odhad parametrů spojitých ARMA procesů z diskrétních záznamů není triviální úloha a zpravidla využívá vzájemné transformace diskrétních a spojitých ARMA modelů. Jinak řečeno, z naměřených dat se odhadnou parametry diskrétního ARMA modelu a získané koeficienty se transformují v koeficienty spojitého modelu. U některých numerických metod dochází k opačným problémům, kdy totiž diskrétní metoda vyžaduje parametry diskrétního ARMA modelu a úloha ve své formulaci předpokládá buzení spojitě, například se spektrem (48).



Vztahem spojitých a diskretních ARMA modelů se zabývá několik prací, letmo se o něm zmiňuje i Priestley (1981), avšak i on se odvolává na články (Phadke and Wu, 1974; Pandit and Wu, 1975). Tam se ukazuje, že diskretizací spojitého ARMA( $p, q$ ) modelu vznikne diskretní ARMA( $p, p - 1$ ) model. Jinými slovy, je-li spojitý ARMA( $p, q$ ) proces  $X(t)$  pozorován v diskretních okamžicích s krokem  $\Delta t$ , výsledný diskretní proces bude právě ARMA( $p, p - 1$ ). Na druhou stranu, pro daný diskretní ARMA( $p, p - 1$ ) a dost malý časový krok  $\Delta t$  existuje jediný jemu odpovídající spojitý AR( $p$ ) proces.

**Určení koeficientů aproximace** je možno provést v zásadě dvěma způsoby: jednak odhadem koeficientů diskretního AR(2) modelu ze záznamu samotného a následnou transformací na model spojitý, a nebo aproximací odhadu spektrální hustoty záznamu funkcí (47) metodou nejmenších čtverců. Protože odhad koeficientů spojitého ARMA modelu z diskretních realizací není přímočarý, preferujeme zde metodu aproximace spektrální hustoty.

Tuto druhou metodu je výhodné provádět ve dvou krocích: výpočet počátečního přiblížení a následná nelineární optimalizace. Počáteční přiblížení může být určeno řešením přeурčené soustavy

$$\begin{pmatrix} \omega_1^4 & \omega_1^2 & 1 \\ \omega_2^4 & \omega_2^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_r^4 & \omega_r^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_4 \\ \eta_2 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\psi^*(\omega_1) \\ 1/\psi^*(\omega_2) \\ \vdots \\ 1/\psi^*(\omega_r) \end{pmatrix}$$

kde  $\omega_1, \dots, \omega_r$ ;  $r > 3$  jsou pořadnice několika bodů v okolí maximální hodnoty odhadu spektrální hustoty  $\psi^*$ . Získané koeficienty  $\eta_4, \eta_2, \eta_0$  pak dosadíme do funkce

$$\frac{1}{\eta_4 \omega^4 + \eta_2 \omega^2 + \eta_0} \quad (49)$$

a porovnáním koeficientů  $\psi(\omega)$  (24) a (49) získáme

$$\hat{\alpha}_0 = \sqrt{\eta_0/\eta_4} \quad \hat{\alpha}_1 = \sqrt{\eta_2/\eta_4 + 2\hat{\alpha}_0} \quad \hat{I}_0 = 2\pi/\eta_4$$

Konečné koeficienty  $a, b, \sigma$  získáme nelineární minimalizací

$$\min \|\psi^*(\omega) - \psi(\omega)\|$$

vzhledem k  $a, b, \sigma$  s použitím  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}$  jako počáteční aproximace. Tímto způsobem byly získány aproximace spektrální hustoty složek víceúrovňového rozkladu na obrázku 10 na straně 27.

Obdobného postupu je možno použít i pro hledání koeficientů ARMA(2, 1) procesu. V prvním kroku hledáme počáteční přiblížení stejné jako pro výpočet AR(2) koeficientů, nelineární optimalizaci pak provádíme již pro koeficienty ARMA(2, 1) modelu, s nulovým počátečním přiblížením pro koeficient  $\beta_1$  z MA části rovnice (22).

Hlavním úskalím uvedeného postupu zůstává výpočet dostatečně věrohodného odhadu spektrální hustoty ze stacionarizované části seizmogramu. Podle doporučení uvedeného v publikaci (Anděl, 1967) byl používán Parzenův odhad spektrální hustoty, který vychází z práce (Parzen, 1961). Jako řada jiných odhadů pracuje tak, že shlazuje periodogram integrálním okénkem šířky  $M$  vzorků. Na příkladech se známou spektrální hustotou je možno ověřit, že, v souladu s tvrzením knihy (Anděl, 1967), je optimální šířka okénka  $M = N/6$  až  $M = N/4$ . Nicméně v některých případech dává odhad i pro „optimální“ leč různé hodnoty  $M$  dost zásadně rozdílné aproximace spektrálních hustot. Jednotlivé aproximace mívají podobné hodnoty rozptylu (jakožto integrálu), dosti dobře odpovídající hodnotám rozptylu samotné řady (jakožto průměrnému součtu kvadrátů hodnot vzorků). Liší se však šířkou a hodnotou maxima, někdy mírně i jeho umístěním. Bohužel, zrovna tyto vlastnosti nepříjemně ovlivňují chování korelační metody, jak je uvedeno v kapitole o chybové analýze korelační metody.

## 4 Řešení úloh

Pohyb lineární soustavy tuhých těles vybuzený pohybem podpor (například při zemětřesení) se popisuje rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\dot{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{G}\mathbf{v}(t) \quad (50)$$

kde

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  – jsou reálné konstantní čtvercové matice rozměru  $n \times n$

$\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  – reálné konstantní obdélníkové matice typu  $n \times m$

$\mathbf{u}(t)$  – sloupcový vektor odezvy odpovídající posunům ( $n$ )

$\mathbf{v}(t)$  – sloupcový vektor předepsaných posunů v podporách ( $m$ )

$n, m$  – počet složek vektoru neznámých, resp. pravé strany

Počáteční podmínky budou vždy uvažovány nulové, neboť soustava bývá před počátkem zemětřesení v klidu.

Často se na pravé straně rovnice (50) uvažuje pouze vektor popisující zrychlení či sílu (která je ovšem zrychlení přímo úměrná). To je možno užít například při buzení větrem, kdy je působící síla známá, nikoli při výpočtu účinků zemětřesení. V našem případě je možno redukovat buzení na jediný vektor pouze ve speciálním případě, kdy totiž uvažujeme matici tlumení  $\mathbf{B}$  úměrnou matici tuhosti  $\mathbf{C}$ . Pro ozřejmení odvodíme varianty rovnice (50).

Východiskem bude rovnice rovnováhy sil pro společný vektor neznámých posunů konstrukce a známých posunů podpor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad (51)$$

kde  $\mathbf{P}$  je vektor neznámých sil působících v základech. Roznásobením prvního řádku rovnice (51) přejde tato přímo v rovnici (50), kde  $\mathbf{F} = \mathbf{B}_{12}$  a  $\mathbf{G} = \mathbf{C}_{12}$ . Zavedením substituce

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_{12}\mathbf{v}$$

se (50) transformuje na rovnici pro neznámé  $\mathbf{w}$ , kdy na pravé straně bude figurovat zrychlení a rychlost:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{w}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_{12}\ddot{\mathbf{v}} - (\mathbf{B}_{12} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_{12})\dot{\mathbf{v}}(t) \quad (52)$$

Pokud by  $\mathbf{B}$  bylo násobkem  $\mathbf{C}$ , člen s  $\dot{\mathbf{v}}$  vypadne.

Není důležité, zda se k výpočtu užívá rovnice (50) či (52), neznámé obou rovnic jsou propojeny jednoduchou lineární transformací. Důležité je, že s výjimkou speciálního případu je nutno brát jako vstup vždy dvojici procesů, k posunutí či zrychlení i rychlost.

Neboť uvažujeme soustavu lineární, je v deterministickém případě možné buď považovat celou pravou stranu za jednu funkci nebo provést výpočet dvakrát pro jednotlivé členy a výsledek sečíst. Při výpočtu kovariančních charakteristik odezvy však není postup tak přímočarý. Buďto je nutno brát v úvahu celou dvojčlennou pravou stranu, nebo je třeba počítat rovněž vzájemné kovariance působené jednotlivými složkami buzení. Který přístup je vhodnější pak závisí na zvolené metodě.

## 4.1 Deterministické řešení

Numerické řešení rovnice (50) je základem metod typu Monte Carlo či prostředkem k hrubému odhadu chování systému. K numerickému řešení uvedeného typu úloh je možno použít řady více či méně osvědčených a (především) již naprogramovaných řešičů počátečních úloh. Jistým omezením je fakt, že převedení naší úlohy na diferenciální rovnici prvního řádu znamená zdvojnásobení velikosti matic, s nimiž pracujeme. Rovněž je nutno počítat s tím, že data pravé strany jsou dána v diskrétních bodech, což rovněž zúží výběr.

**Newmarkova metoda** Velmi populárním nástrojem k řešení počáteční úlohy s rovnicí (50) je Newmarkova metoda (Newmark, 1959). Mezi její hlavní výhody patří snadná aplikovatelnost pro soustavy, jak bude uvedeno dále. Formule pro  $k + 1$  krok má tvar

$$(a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{B} + \mathbf{C}) \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{P}(t_k) + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_k + a_2 \dot{\mathbf{u}}_k + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{C}(a_4 \mathbf{u}_k + a_5 \dot{\mathbf{u}}_k + a_6 \ddot{\mathbf{u}}_k)$$

kde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t} & a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 \\ a_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) & a_6 &= \Delta t (1 - \gamma) & a_7 &= \gamma \Delta t \end{aligned}$$

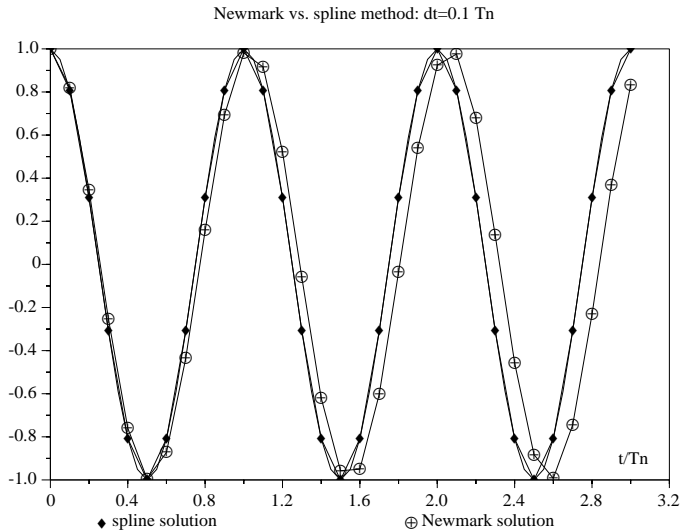
$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{F}\dot{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{G}\mathbf{v}(t)$$

Jednotlivé aproximace řešení v časových okamžicích  $t_k = k \cdot \Delta t$  jsou označeny  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{u}_0$  je dáno počáteční podmínkou.  $\beta$  a  $\gamma$  jsou parametry metody, pro  $\beta \geq \frac{1}{4} (\frac{1}{2} + \gamma)^2$ ,  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} + \gamma + \beta > 0$  je metoda nepodmíněně stabilní. Komerční konečněprvkový systém ANSYS<sup>®</sup> používá hodnoty  $\beta = \frac{1}{4} (1 + \gamma_0)^2$ ,  $\gamma = \frac{1}{2} + \gamma_0$ , kde  $\gamma_0$  je faktor poklesu amplitud (*amplitude decay factor*), implicitně  $\gamma_0 = 0.005$  (ANSYS, 1990). Detailní rozbor metody a její aplikace na rozsáhlé soustavy vzniklé metodou konečných prvků popisuje Zienkiewicz (1977). Metoda vyžaduje v každém kroku řešení soustavy rovnic s maticí, již je možno rozložit na začátku výpočtu.

Jak bylo řečeno, Newmarkova metoda je sice pro vhodné parametry  $\beta$  a  $\gamma$  absolutně stabilní, ale pro rozumnou přesnost je zapotřebí uvažovat délku dostatečně malou kroku. V literatuře se uvádí požadavek  $\Delta t < 0.1T_n$ , tedy menší než desetina nejmenší (uvažované) vlastní periody soustavy. A i pro dost malá  $\Delta t$  metoda mění frekvenční obsah odezvy. Jev je ukázán na obrázku 13 pro rovnici

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{u} + k \cdot u &= 0 \\ u(0) &= 1 \quad \text{a} \quad \dot{u}(0) = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

jejíž řešení  $u(t) = \cos(t\sqrt{\frac{k}{m}})$  má vlastní periodu  $T_n = 2\pi\sqrt{m/k}$



Obrázek 13: Porovnání řešení úlohy (53) Newmarkovou metodou (⊕) a pomocí splajnové aproximace pravé strany (●) (podle algoritmu (56)). Časový krok  $\Delta t = 0.1T_n$

Na obrázku 13 je vykreslen průběh přesného řešení (hladká čára bez značek, splývá se splajnovým řešením) spolu s řešením Newmarkovým. Jak je vidět, i pro  $\Delta t = 0.1T_n$  je frekvenční zkreslení Newmarkovy metody znatelné. Pro porovnání je obrázek doplněn řešením spočteným podle algoritmu (56), který využívá aproximaci pravé strany kubickým

splajnem. Řešení vypočtené touto druhou metodou se (v tomto případě) při stejné délce kroku od přesného řešení takřka neliší. Na vodorovné ose je vynesena poměr  $t/T_n$ . Pro testy byla použita implementace Newmarkovy metody užitá v toolboxu CALFEM (2002) pro MATLAB<sup>®</sup>.

**Metoda založená na Duhamelově integrálu** Práce (Nigam and Jennigs, 1969) a (Beck and Dowling, 1988) se zabývají numerickým řešením odezvy jednoduchého oscilátoru

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega^2x = -a(t) \quad (54)$$

a působící zrychlení  $a(t)$  nahradí po částech lineární funkcí. Vzniklou jednoduchou lineární rovnicí je možno vyřešit přesně pro odezvu  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  i  $x$  (po řadě zrychlení, rychlost, přemístění) a podle přesných vzorců pak rekurentně počítat časový průběh požadované veličiny. Práce (Beck and Dowling, 1988) navrhuje efektivnější implementaci původního algoritmu z (Nigam and Jennigs, 1969). Nicméně, autoři se stále omezují na skalární případ.

**Konečné prvky** Výpočet pomocí konečných prvků je navržen v (Kujawski and Deai, 1984), nicméně jeho algoritmus dává přesné řešení pouze pro nebuzené (vlastní) kmitání oscilátoru s nulovým tlumením.

**Řešení systému rovnic** Obliba Newmarkovy metody je založena na možnosti počítání odezvy pro rozsáhlé soustavy rovnic, často vzniklé při použití FEM. Pro soustavy malé či střední velikosti je však možno zobecnit přesnou metodu založenou na Duhamelově integrálu. Rovnici (50) je jistě možno přepsat do tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t) = \sum \mathbf{A}_i p_i(t) \quad (55)$$

kde  $p_i(t)$  jsou skalární procesy a  $\mathbf{A}_i$  jsou konstantní vektory určující umístění jednotlivých složek buzení. Protože je možné řešit rovnici pro každý člen pravé strany zvlášť, stačí uvažovat pouze jediný člen.

Je-li pravá strana zadána v diskrétních bodech, je potřeba ji aproximovat vhodnou spojitou funkcí. Přírozenou volbou jsou lineární funkce, v takovém případě je možno Duhamelův integrál rovnice spočítat přesně. Výsledná metoda bude dosti podobná Newmarkově metodě. Obdobný algoritmus je možno formulovat i pro aproximaci skalární složky pravé strany pomocí splajně, například kubických (viz (Fischer C., 1998)). Taková globální aproximace diskrétní pravé strany řeší některé problémy se stabilitou Newmarkovy metody a umožňuje použití i v případě, kdy vzorkovací frekvence dat pravé strany je příliš nízká pro bezpečné použití Newmarkovy metody. Pochopitelně, je-li pravá strana zadána pouze diskrétní množinou hodnot, každá spojitá aproximace vnáší do rovnice nepodloženou informaci. Lineární volba zajistí více méně konzervativní výsledky maximálních amplitud, globální aproximace kubickým splajnem zase zachování frekvenčního obsahu. Jsou případy, kdy je možno na základě znalosti fyzikálního pozadí rozhodnout o vhodnosti té či oné metody, někdy je například žádoucí minimalizace křivosti aproximované funkce, jak ji nabízí kubické splajny. A je třeba připomenout, že skutečně hrubě zaznamenaná data nenapraví sebelepší aproximace.

Následující algoritmus využívá rovnici (55) pro jedno konkrétní  $j$  převedenou na soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{F} p(t)$$

kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

Řešení se pak hledá pro každý člen pravé strany ve tvaru

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{Q}(t-t_0)}\mathbf{U}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{Q}(t-\tau)} \mathbf{F} p(\tau) d\tau$$

kde  $\mathbf{U}(t_0)$  je vektor počátečních podmínek. Uváží-li se lineární aproximace  $j$ -té (skalární) složky pravé strany — označena  $r(t)$  (index  $j$  vynechán),

$$r_i(\tau) = \frac{p_j(t_i) - p_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (\tau - t_{i-1}) + p_j(t_{i-1}) \text{ pro } \tau \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$$

pak s označením  $\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_j p_j(t_i) = \mathbf{F}_j r(t_i)$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  je možno formulovat algoritmus

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r}_0 \\ \text{pro } i &= 1, 2, \dots \\ \mathbf{R} &= \exp(\mathbf{Q} \Delta t_i) \\ \mathbf{q}_{i-1} &= \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_i &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r}_i \\ \mathbf{s}_i &= \frac{1}{\Delta t_i} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) \\ \mathbf{U}_i &= \mathbf{R} (\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{s}_i + \mathbf{q}_{i-1}) - \mathbf{s}_i - \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (56)$$

Zde  $\mathbf{U}_0$  je počáteční podmínka a  $\mathbf{U}_i$  jsou řešení v bodech časové diskretizace. Je zřejmé, že v případě konstantního časového kroku  $\Delta t$  bude možno vypočítat maticovou exponenciálu  $\mathbf{R}$  mimo cyklus. Navíc, tutéž vypočtenou  $\mathbf{R}$  je možno využít při výpočtu pro různé pravé strany.

Následuje algoritmus pro pravou stranu aproximovanou kubickým splajnem. V tomto případě je  $j$ -tý člen pravé strany  $p_j(t)$  na  $k$ -tém intervalu splajnového dělení,  $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$ , reprezentován koeficienty  $p_{k,0}, \dots, p_{k,3}$ :  $p_j(t) = p_{k,0} + p_{k,1}t + p_{k,2}t^2 + p_{k,3}t^3$

pro  $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \exp(\mathbf{Q} \Delta t_i) \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{F}_j \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{Q}^{-2}(\mathbf{R} - \Delta t \mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{F}_j = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \Delta t \mathbf{F}_j) \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{Q}^{-3}(2\mathbf{R} - 2\Delta t \mathbf{Q} - \Delta t^2 \mathbf{Q}^2 - 2\mathbf{I})\mathbf{F}_j = \mathbf{Q}^{-1}(2\mathbf{x}_1 - \Delta t^2 \mathbf{F}_j) \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{Q}^{-4}(6\mathbf{R} - 6\Delta t \mathbf{Q} - 3\Delta t^2 \mathbf{Q}^2 - \Delta t^3 \mathbf{Q}^3 - 6\mathbf{I})\mathbf{F}_j = \mathbf{Q}^{-1}(3\mathbf{x}_2 - \Delta t^3 \mathbf{F}_j) \\ \mathbf{U}_i &= \mathbf{R}\mathbf{U}_{i-1} + p_{i,3}\mathbf{x}_3 + p_{i,2}\mathbf{x}_2 + p_{i,1}\mathbf{x}_1 + p_{i,0}\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (57)$$

Snad jen podotkněme, že v případě konstantního časového kroku (což je obvyklý případ), je v obou případech (56) i (57) možno nejsložitější výpočty (rozklad matice  $\mathbf{Q}$  a výpočet maticové exponenciály) provést jednou na začátku cyklu.

Mocným nástrojem pro výpočet maticové exponenciály i pro rozsáhlé a řídké matice je programový balík EXPOKIT (Sidje, 1998).

## 4.2 Stochastická Newmarkova metoda

Poměrná jednoduchost výpočtu (deterministického) řešení rovnice (50) láká k vytvoření obdobného výpočetního prostředku i pro stochastické rovnice. Jedním z průkopníků tohoto přístupu je C. W. S. To. Zavedl různá implicitní a explicitní přímá integrační schemata pro lineární i nelineární náhodné vibrace. Jako první to byla stochastická metoda centrálních diferencí (To, 1986), stochastická Houboltova metoda, algoritmy Newmarkova typu (To, 1992). Naproti tomu stochastickou verzi metody založené na využití Duhamelova integrálu (korelační metoda dále v této práci) publikoval Náprstek and Fischer (1995).

Stručný popis stochastické Newmarkovy metody uvedený v tomto odstavci vychází z článku (Zhang et al., 1999). Metoda odvozená v článku uvažuje pravou stranu rovnice (50)

jako jednoduchý vektor  $\mathbf{p}(t)$ . Ve světle úvodu této kapitoly to není možno považovat za dostatečné a bude třeba navrhnout modifikaci metody.

Uvažujme tedy pro začátek jednoduchý tvar rovnice

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (58)$$

Navíc předpokládáme, že  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{m}(t)\eta(t)$ , kde  $\mathbf{m}(t)$  je vektor deterministických modulací a  $\eta(t)$  skalární stacionární gaussovský náhodný proces.

Newmarkovu metodu je možno přepsat do tvaru rekurence pro hledaný vektor  $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t_n) \\ \dot{\mathbf{u}}(t_n) \end{pmatrix}$ :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{T}_1\mathbf{U}_n + \mathbf{T}_2\mathbf{P}_n \quad (59)$$

přičemž

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{N}_5 & \mathbf{N}_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_4 & \beta\Delta t^2\mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_7 & \gamma\Delta t\mathbf{N}_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_{n+1} \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= (\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{B} + \beta\Delta t^2\mathbf{C})^{-1} \\ \mathbf{N}_2 &= \mathbf{I} - \mathbf{N}_1 \left( \frac{1}{2}\Delta t^2\mathbf{C} + \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\Delta t^3\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \right) \\ \mathbf{N}_3 &= \mathbf{N}_1 \left( \Delta t\mathbf{M} + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\Delta t^2\mathbf{B} - \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\Delta t^3\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \right) \\ \mathbf{N}_4 &= \mathbf{N}_1 \left( \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\mathbf{I} + \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\Delta t^3\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1} \right) \\ \mathbf{N}_5 &= -\mathbf{N}_1 \left( \Delta t\mathbf{C} - \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\Delta t^3\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \right) \\ \mathbf{N}_6 &= \mathbf{I} - \mathbf{N}_1 \left( \gamma\Delta t^2\mathbf{C} + \Delta t\mathbf{B} - \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\Delta t^3\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \right) \\ \mathbf{N}_7 &= \mathbf{N}_1 \left( (1 - \gamma)\Delta t\mathbf{I} - \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\Delta t^3\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \right) \end{aligned}$$

kde  $\beta$  a  $\gamma$  jsou známé parametry Newmarkovy metody.

#### 4.2.1 Buzení modulovaným bílým šumem.

Při buzení centrovaným gaussovským modulovaným bílým šumem bude i odezva centrovaná a pro kovarianční matici bude možno psát

$$\mathbf{K}(t_{n+1}) = \mathbf{T}_1\mathbf{K}(t_n)\mathbf{T}_1^\top + \mathbf{T}_2\mathbf{S}(t_n)\mathbf{T}_2^\top + \mathbf{T}_1\mathbf{K}_1(t_n)\mathbf{T}_2^\top + \mathbf{T}_2\mathbf{K}_1(t_n)\mathbf{T}_1^\top \quad (61)$$

kde

$$\mathbf{K}(t_n) = \mathbb{E}\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^\top = \mathbb{E} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^\top & \mathbf{u}_n\dot{\mathbf{u}}_n^\top \\ \dot{\mathbf{u}}_n\mathbf{u}_n^\top & \dot{\mathbf{u}}_n\dot{\mathbf{u}}_n^\top \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{S}(t_n) = \mathbb{E}\mathbf{P}_n\mathbf{P}_n^\top = \mathbb{E} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^\top & \mathbf{p}_n\mathbf{p}_{n+1}^\top \\ \mathbf{p}_{n+1}\mathbf{p}_n^\top & \mathbf{p}_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}^\top \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\mathbf{K}_1(t_n) = \mathbb{E}\mathbf{U}_n\mathbf{P}_n^\top = \mathbb{E} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n\mathbf{p}_n^\top & \mathbf{u}_n\mathbf{p}_{n+1}^\top \\ \dot{\mathbf{u}}_n\mathbf{p}_n^\top & \dot{\mathbf{u}}_n\mathbf{p}_{n+1}^\top \end{pmatrix} \quad (64)$$

Buzení má, jak bylo řečeno, tvar  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{m}(t)w_t$ , kde  $\mathbf{m}(t)$  je vektor deterministických modulačních funkcí a  $w_t$  diskretní skalární (reálný) bílý šum. Při označení  $\sigma_w^2 = \mathbb{E}w_t w_t$  bude

$$\mathbb{E}\mathbf{p}_n\mathbf{p}_m^\top = \begin{cases} \mathbf{m}(t_n)\mathbf{m}(t_m)^\top\sigma_w^2 & m = n \\ \mathbf{0} & m \neq n \end{cases}$$

a proto

$$\mathbf{S}(t_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(t_n)\mathbf{m}(t_n)^\top \sigma_w^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}(t_{n+1})\mathbf{m}(t_{n+1})^\top \sigma_w^2 \end{pmatrix}$$

Hodnoty  $\mathbf{E}\mathbf{u}_n\mathbf{p}_n^\top$  a  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}_n\mathbf{p}_n^\top$  nemusí být (možná poněkud překvapivě) nulové, mohou být vypočteny z rovnice (59). Přenásobením rovnice (59) vektorem  $\mathbf{P}_{n+1}^\top$  a aplikací operátoru matematického středu získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{U}_{n+1}\mathbf{P}_{n+1}^\top &= \mathbf{T}_1\mathbf{E}\mathbf{U}_n\mathbf{P}_{n+1}^\top + \mathbf{T}_2\mathbf{E}\mathbf{P}_n\mathbf{P}_{n+1}^\top \\ &= \mathbf{T}_1^{n+1}\mathbf{E}\mathbf{U}_0\mathbf{P}_{n+1}^\top + \mathbf{T}_2\mathbf{E}\mathbf{P}_n\mathbf{P}_{n+1}^\top \end{aligned}$$

Protože počáteční podmínky  $\mathbf{U}_0$  jsou konstantní, první člen pravé strany vypadne a rovnice po rozepsání dostane tvar

$$\mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}^\top & \mathbf{u}_{n+1}\mathbf{p}_{n+2}^\top \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}^\top & \dot{\mathbf{u}}_{n+1}\mathbf{p}_{n+2}^\top \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}\mathbf{p}_{n+1}\mathbf{p}_{n+1}^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (65)$$

Po dosazení rovnice (65) v čase  $t_n$  namísto  $t_{n+1}$  do rovnice (64), bude možno smíšenou kovarianční matici  $\mathbf{K}_1(t_n)$  zapsat jako

$$\mathbf{K}_1(t_n) = \begin{pmatrix} \beta\Delta t^2 \mathbf{N}_1 \mathbf{E}\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^\top & \mathbf{0} \\ \gamma\Delta t \mathbf{N}_1 \mathbf{E}\mathbf{p}_n\mathbf{p}_n^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

#### 4.2.2 Diskrétní ARMA model buzení, $p \geq 1$ .

Zhang ve svém článku používá diskrétní ARMA model, jehož koeficienty určuje transformací spojitého Kanai-Tajimi spektra (48) metodologií podle článků (Phadke and Wu, 1974; Pandit and Wu, 1975). Diskrétní ARMA( $p, q$ ) model je definován vztahem

$$\eta_n + \sum_{j=1}^p a_j \eta_{n-j} = w_n + \sum_{j=1}^q b_j w_{n-j} \quad (66)$$

kde  $w_j$  je posloupnost centrovaných nekorelovaných náhodných veličin (bílý šum),  $\mathbf{E}w_i w_i = \sigma_w^2$ . Rovnici (66) je možno přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{n-1} + \mathbf{q}_n \quad (67)$$

kde matice  $\mathbf{A}$  má nenulový první řádek a jednotkovou první subdiagonálu

$$\mathbf{A} = - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Dále bylo označeno

$$\mathbf{q}_n = \begin{pmatrix} w_n + \sum_{j=1}^q b_j w_{n-j} \\ \mathbf{0}_{p-1 \times 1} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\eta}_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \vdots \\ \eta_{n-p+1} \end{pmatrix} \quad (69)$$

Vektor buzení  $\boldsymbol{\eta}_j$  lze přidat k neznámým a označit jej jako  $\mathbf{y}_n$ :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \boldsymbol{\eta}_{n+2} \end{pmatrix}$$

Po dosazení do rovnice (59) bude

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{y}_n + \mathbf{z}_{n+2} \quad (70)$$

kde matice  $\mathbf{T}$  dimenze  $(2N+p) \times (2N+p)$  má tvar ( $N$  je počet neznámých původní soustavy)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_3 \\ \mathbf{0} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \quad \text{a } \mathbf{z} \text{ je vektor : } \quad \mathbf{z}_{n+2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2N} \\ \mathbf{q}_{n+2} \end{pmatrix}$$

Ve výrazu pro  $\mathbf{T}$  je matice  $\mathbf{T}_1$  je definována rovnicí (60), matice  $\mathbf{T}_3$  rovnicí (67) a

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} \beta\Delta t^2 \mathbf{N}_1 \mathbf{m}(t_{n+1}) & \mathbf{N}_4 \mathbf{m}(t_n) & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \\ \gamma\Delta t \mathbf{N}_1 \mathbf{m}(t_{n+1}) & \mathbf{N}_7 \mathbf{m}(t_n) & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \end{pmatrix}_{2N \times p} \quad (71)$$

K odvození matice  $\mathbf{T}_3$  je vhodné si uvědomit, že buzení má tvar  $\mathbf{p}_n = \mathbf{m}(t_n)\eta_n$ .  $\mathbf{T}_3$  je volena tak, aby  $\mathbf{T}_2(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1})^\top = \mathbf{T}_3\eta_{n+1}$ .

Z rovnice (70) získáme rekurentní formuli pro kovarianční matici systému

$$\mathbf{E}\mathbf{y}_{n+1}\mathbf{y}_{n+1}^\top = \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{y}_n\mathbf{y}_n^\top\mathbf{T}^\top + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_3^\top = \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{y}_n\mathbf{y}_n^\top\mathbf{T}^\top + \mathbf{Z} \quad (72)$$

kde  $\mathbf{Z} = \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_3^\top$ ,  $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{E}\mathbf{z}_n\mathbf{z}_n^\top)$  a  $\mathbf{K}_3 = \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{y}_n\mathbf{z}_{n+2}^\top$ . Matice  $\mathbf{K}_2$  má jeden jediný nenulový prvek  $c_1$  na pozici  $(2N+1, 2N+1)$

$$c_1 = \left(1 + \sum_{i=1}^q b_i^2\right) \sigma_w^2$$

Odvození tvaru matice  $\mathbf{K}_3$  je v citovaném článku provedeno chybně. Zde budeme postupovat následovně. Do výrazu

$$\mathbf{E}\mathbf{y}_n\mathbf{z}_{n+2}^\top = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_n \\ \eta_{n+1} \\ \vdots \\ \eta_{n-p+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2N \times 1} \\ w_{n+2} + \sum_{j=1}^q b_j w_{n-j+2} \\ \mathbf{0}_{p-1 \times 1} \end{pmatrix}^\top$$

postupně  $n$  krát dosadíme za  $\mathbf{y}_n$  podle rekurence (70):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{y}_n\mathbf{z}_{n+2}^\top &= \mathbf{E}(\mathbf{T}\mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{z}_{n+1}) \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top = \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{y}_{n-1} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \mathbf{E}\mathbf{z}_{n+1} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{T}(\mathbf{T}\mathbf{y}_{n-2} + \mathbf{z}_n) + \mathbf{z}_{n+1}) \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top = \\ &= \mathbf{T}^2\mathbf{E}\mathbf{y}_{n-2} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{z}_n \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \mathbf{E}\mathbf{z}_{n+1} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top \\ &\vdots \\ &= \mathbf{T}^q\mathbf{E}\mathbf{y}_{n-q} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \mathbf{T}^{q-1}\mathbf{E}\mathbf{z}_{n-q+2} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \dots + \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{z}_n \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \mathbf{E}\mathbf{z}_{n+1} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top \\ &\vdots \\ &= \mathbf{T}^n\mathbf{E}\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \mathbf{T}^{n-1}\mathbf{E}\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \dots + \mathbf{T}\mathbf{E}\mathbf{z}_n \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top + \mathbf{E}\mathbf{z}_{n+1} \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top \end{aligned}$$

Neboť  $\mathbf{y}_0$  považujeme za deterministické počáteční podmínky, bude  $\mathbf{E}\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{z}_{n+2}^\top = \mathbf{0}$ . Dále označme

$$\mathbf{E}\mathbf{z}_{n-j} \cdot \mathbf{z}_n^\top = \boldsymbol{\xi}_j \quad (73)$$

$\boldsymbol{\xi}_j$  je čtvercová matice rozměru  $2N+p$ , jejíž jediný neulový prvek na pozici  $(2N+1, 2N+1)$  má tvar

$$\begin{aligned} &\left(b_j + \sum_{i=1}^{q-j} b_i b_{i+j}\right) \sigma_w^2 && j \leq q \\ &0 && \text{pro } j > q \end{aligned}$$



Proto

$$\mathbf{E} \mathbf{y}_n \mathbf{z}_{n+2}^\top = \sum_{j=1}^q \mathbf{T}^{j-1} \boldsymbol{\xi}_j$$

a celkově bude

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{T} \mathbf{E} \mathbf{y}_n \mathbf{z}_{n+2}^\top = \sum_{j=1}^q \mathbf{T}^j \boldsymbol{\xi}_j \quad (74)$$

Připomeňme, že matice  $\boldsymbol{\xi}_j$  mají jediný nenulový prvek. Proto matice  $\mathbf{E} \mathbf{y}_n \mathbf{z}_{n+2}^\top$  a následně i  $\mathbf{K}_3$  mají nenulový pouze  $(2N + 1)$ -ní sloupec.

### 4.2.3 Zobecnění metody pro pravou stranu obsahující derivaci

Jak bylo diskutováno výše, jednoduchá pravá strana v rovnici (58) není dostatečně obecná v případě konstrukce buzené pohybem podpor. Pro řešení rovnice (50) je potřeba metodu modifikovat.

Uvažujme opět buzení jakožto vektorový násobek skalárního diskrétního ARMA( $p, q$ ) procesu. Derivace  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  na pravé straně (50) se bude aproximovat zpětnou diferencí, proto budou v každém kroku zapotřebí tři hodnoty  $\eta_{k+1}$ ,  $\eta_k$  a  $\eta_{k-1}$ . Bude proto nutno používat alespoň tři AR koeficienty, byť by  $a_2$  byl nulový. To jest, rozměr matice  $\mathcal{A}$  definované rovnicí (68) bude alespoň 3. Je-li

$$\mathbf{v}(t_k) = \mathbf{m}(t_k) \eta_k \quad \text{a} \quad \dot{\mathbf{v}}(t_k) = \dot{\mathbf{m}}(t_k) \eta_k + \mathbf{m}(t_k) \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\Delta t}$$

pak

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}(t_k) = \mathbf{s}(t_k) \eta_k + \mathbf{F} \frac{\mathbf{m}(t_k)}{\Delta t} \eta_{k-1} \quad \text{kde} \quad \mathbf{s}(t) = -\mathbf{F} \left( \dot{\mathbf{m}}(t) + \frac{\mathbf{m}(t)}{\Delta t} \right) + \mathbf{G} \mathbf{m}(t)$$

V postupu popsaném rovnicemi (67) až (74) nahradí matici  $\mathbf{T}_3$ , definovanou rovnicí (71), matice

$$\tilde{\mathbf{T}}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_4 & \beta \Delta t^2 \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_7 & \gamma \Delta t \mathbf{N}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{s}(t_k) & \mathbf{F} \frac{\mathbf{m}(t_k)}{\Delta t} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}(t_{k+1}) & \mathbf{F} \frac{\mathbf{m}(t_{k+1})}{\Delta t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{2N \times p}$$

Ostatní postup může zůstat beze změny.

### 4.2.4 Numerické příklady

Na tomto místě ukážeme chování metody při aplikaci na příklady uvedené v příloze na straně 66.

**Příklad 1** V případě stacionárního buzení, jak je použito v základní variantě příkladu 1, je výsledkem stacionární proces, jehož rozptyl pro jednotlivé varianty metody uveden v tabulce 2. Parametry diskrétního ARMA buzení jsou uvedeny v tabulce 7 na straně 66.

$\Delta t$	buzení		přesné řešení
	AR(2)	ARMA(2, 1)	
0.125	0.220273	0.211072	0.253115
0.01	0.254184	0.254184	

Tabulka 2: Výsledky Newmarkovy metody, příklad 1

Časový krok  $\Delta t = 0.125$  se ukazuje jako nedostatečný, jakkoli vliv na kvalitu výsledku má i nepřesná aproximace spojitého AR(2) modelu. Naopak, pro  $\Delta t = 0.01$  jsou identické výsledky pro AR i ARMA buzení způsobené tím, že MA koeficient v ARMA(2, 1) aproximaci je v podstatě nulový. Vliv délky časového kroku na přesnost řešení je rozebrán v práci (Zhang et al., 1999). Zhang zde doporučuje (v souladu s všeobecným doporučením pro klasickou Newmarkovu metodu) brát hodnotu  $T/10$ , kde  $T$  je minimální vlastní perioda soustavy. V našem případě by to bylo 0.099.

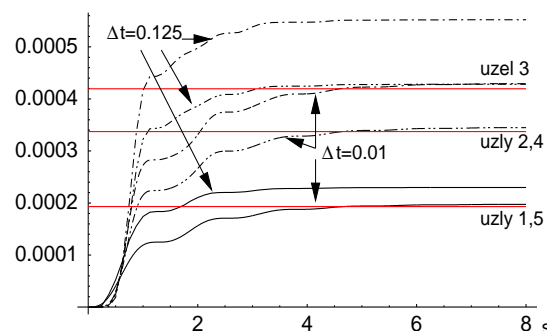
**Příklad 2** Druhý příklad budeme zkoumat pro tři různé volby modulační funkce: pro jednotkovou skokovou modulaci, dvojitě exponenciální funkci (A.5) a pak pro analýzu konkrétního příkladu zemětřesení se splajnovou modulací. V prvních dvou případech budeme brát diskretní ARMA(2, 1) aproximaci spojitého AR(2) buzení se spektrální hustotou buzení s koeficienty (A.3), v posledním pak s koeficienty (A.4). Koeficienty použité aproximace jsou vypsány v tabulce 8 na straně 68.

**Buzení skokovou modulací** je kvazistacionární děj, rozptyly ustáleného řešení je možno spočítat analyticky, jak je uvedeno v příloze. Nekonečná derivace v počátku byla aproximována velkým pulsem po dobu  $2\Delta t$ , nicméně to na tvar výsledků nemělo výrazný vliv.

Vypočtené hodnoty rozptylů řešení koeficientů jsou v tabulce 3, průběh je pro obě délky kroku naznačen v obrázku 14. Zde vodorovné čáry naznačují přesné řešení.

hodnoty $\times 10^{-4}$	uzly: 1,5	2,4	3
$\Delta t = 0.125$	2.298	4.283	5.522
$\Delta t = 0.01$	1.977	3.455	4.301
přesně	1.932	3.373	4.194

Tabulka 3: Výsledky stochastické Newmarkovy metody pro příklad 2

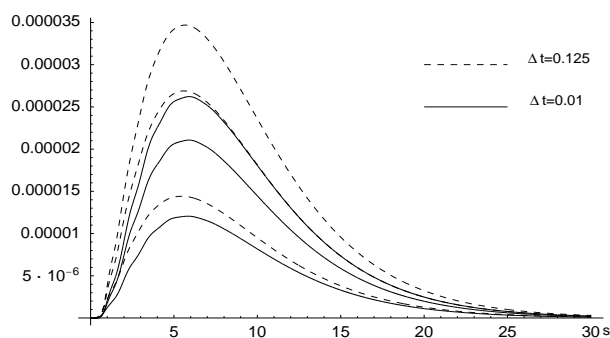


Obrázek 14: Časový průběh rozptylu odezvy mostku při skokové modulaci

**Buzení dvojitě exponenciální modulací** Obrázek 15 ukazuje časový průběh rozptylu odezvy mostku pro buzení definované modulační funkcí (A.5) a diskretním ARMA(2, 1) modelem aproximujícím spektrální hustotu (A.3). Výpočet pro delší časový krok  $\Delta t = 0.125$  je vykreslen

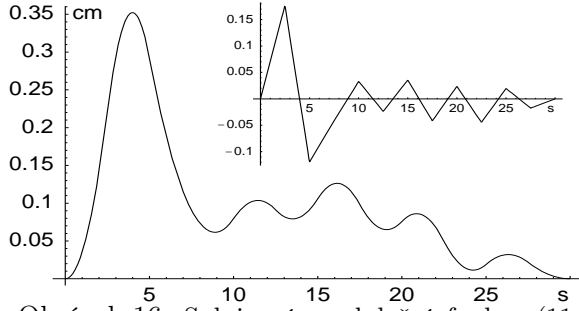
čárkovanou čarou, nejvyšší křivky odpovídají středním bodům mostku. Opět se zde ukazuje, že příliš dlouhý časový krok hrubě nadhodnocuje vypočtené hodnoty rozptylu.

Bylo by zajímavé porovnat řešení úlohy klasickou stochastickou Newmarkovou metodou podle formulace článku (Zhang et al., 1999) a zobecněné metody pro pravou stranu obsahující derivaci buzení odvozenou v této práci, leč v tomto příkladě rozdíl mezi oběma řešeními nečiní ani tloušťku čáry v obrázku.

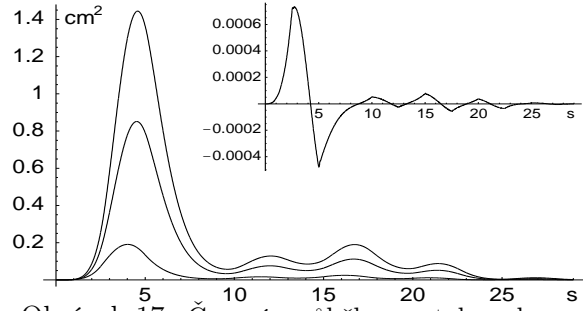


Obrázek 15: Časový průběh rozptylu odezvy mostku při exponenciální modulaci

**Buzení podle skutečného seizmického záznamu** zemětřesení Sierra Madre může být předepsáno jako jedenáctiúsekový kvadratický B-splajn vykreslený na obrázku 16 spolu se spektrální hustotou (A.4). Koeficienty použité aproximace jsou vypsány v tabulce 8. Na obrázku 17 je vykreslena odpovídající odezva. Nejvyšší křivka opět zobrazuje rozptyl odezvy prostředního bodu mostku. Vliv derivace buzení (ve výřezu obrázku 16) na celkovou odezvu, který dovoluje zahrnout do výpočtu zobecněná metoda z odstavce 4.2.3, je i v tomto případě zanedbatelný. Rozdíl rozptylu řešení počítaného klasickou a novou metodou je vykreslen ve výřezu v obrázku 17. Výhody zobecnění Newmarkovy metody se zřejmě projeví až ve zvláštních aplikacích.



Obrázek 16: Splajnová modulační funkce (11 úseků) záznamu zemětřesení Sierra Madre 28. 6. 1991. Ve výřezu jeho derivace.



Obrázek 17: Časový průběh rozptylu odezvy mostku při splajnové modulaci. Ve výřezu vliv derivace buzení na celkovou odezvu.

### 4.3 Korelační metoda

Zavedením  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{s}$  a  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{r}$  je možno redukovat řád diferenciální rovnice (50), ovšem za cenu zdvojnásobení velikosti matice soustavy.

Předpokládejme  $j$ -tou složku buzení ve tvaru spojitého AR(2) modelu se spektrální hustotou

$$\psi_j(\omega) = \frac{I_{0,j}}{2\pi} \frac{1}{(\alpha_{0,j} - \omega^2)^2 + \alpha_{1,j}^2 \omega^2}$$

Zmíněné buzení se do soustavy zavádí jako (spojitý) bílý šum filtrovaný lineárním diferenciálním filtrem druhého řádu, kde  $\alpha_{0,j}$  a  $\alpha_{1,j}$  jsou AR parametry  $j$ -tého filtru, jež má na vstupu bílý šum  $w_j(t)$  o intenzitě  $I_{0,j}$ . Pomocí takové soustavy filtrů je možno rozšířit původní soustavu do tvaru, kde na pravé straně bude pouze bílý šum, jeho filtrace pak bude součástí řešené soustavy.

Soustavu pak bude možno přepsat do Cauchyova tvaru

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{U}(t) + \mathbf{H}\mathbf{m}(t)\mathbf{w}(t) \quad (75)$$

kde

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{s}(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}_{m \times m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n \times n} & 0 & 0 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{m \times m} \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\alpha}_0 & -\boldsymbol{\alpha}_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \text{diag}(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,m}) \quad i = 0, 1; \quad \mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))^T$$

$\mathbf{U}(t)$  – sloupcový vektor délky  $2n + 2m$

$\mathbf{H}$  – matice rozměrů  $(2n + 2m \times m)$ .

$\mathbf{w}(t)$  – vektor bílých šumů pro  $m$  podpor

$\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1$  – vektory AR(2) koeficientů

Za předpokladu pomalé změny modulační funkce je možno zanedbat derivace  $\dot{m}(t)$ . V takovém případě bude  $\dot{u}(t) = m(t)\dot{u}_s(t)$ ,  $\ddot{u}(t) = m(t)\ddot{u}_s(t)$  a podle Itoovy formule (18) má obecné řešení stochastické diferenciální rovnice (75) tvar

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(0) + \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau)\mathbf{H}\mathbf{m}(\tau)d\mathbf{W}_\tau \quad (76)$$

kde  $\mathbf{U}(0)$  je vektor počátečních podmínek a  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{Q}t}$  je fundamentální systém soustavy. Protože jsou počáteční podmínky deterministické, je takový rovněž první člen rovnice (76) a vyjadřuje postupně mizící vliv počátečních podmínek. Vždy je možné určit počáteční okamžik tak, aby bylo možno považovat počáteční podmínky za homogenní:

$$\mathbf{U}(0) = 0$$

Snadno se pak ukáže, že matematický střed řešení  $\mathbf{U}(t)$  rovnice (75) s homogenní počáteční podmínkou je nulový. To proto, že se zde používá spojitý bílý šum s nulovou střední hodnotou. Kovarianční matice je pak určena následující rovnicí

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t_1, t_2) &= \mathbf{E}\{\mathbf{U}(t_1) \cdot \mathbf{U}^H(t_2)\} \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (\mathbf{R}(t_1 - \tau_1) \mathbf{H} \mathbf{m}(\tau_1) d\mathbf{W}_{\tau_1} d\mathbf{W}_{\tau_2}^H \mathbf{m}^H(\tau_2) \mathbf{H}^H \mathbf{R}^H(t_2 - \tau_2)) \end{aligned}$$

Náhodnou část odezvy je možno pro naše účely dostatečně popsat varianční maticí  $\mathbf{D}(t) = \mathbf{K}(t, t)$ . Spolu s vlastností (17) Itoova integrálu vychází

$$\mathbf{D}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) \mathbf{H} \mathbf{m}(\tau) \mathbf{D}_w \mathbf{m}^H(\tau) \mathbf{H}^H \mathbf{R}^H(t - \tau) d\tau \quad (77)$$

kde  $\mathbf{D}_w$  je čtvercová matice velikosti  $(m \times m)$  intenzit vzájemných součinů bílých šumů.

$$\mathbf{D}_w = \mathbf{E}\{d\mathbf{W}_t d\mathbf{W}_t^H\}$$

Rovnice (77) platí obecně pro hermitovskou matici modulačních funkcí  $\mathbf{m}(t)$  s nulovými hodnotami pro  $t \leq 0$  a zanedbatelnou derivací. Pro některé volby modulačních funkcí je možno vyčíslit integrál (77) v uzavřeném tvaru.

Odvození diferenciálního vztahu pro výpočet varianční matice  $\mathbf{D}(t)$  není v původní publikaci (Náprstek and Fischer, 1995) zcela jasné. Je však možno postupovat dvěma způsoby: Buďto výpočtem stochastického diferenciálu  $\frac{d}{dt} \mathbf{U}(t) \mathbf{U}^H(t)$  pomocí Itoovy formule (viz rovnici (3.62) publikace (Pugačev and Sincyn, 1990), str. 197) nebo přímou (deterministickou) derivací rovnice (77) podle  $t$  (rovnice (5.27-28), str. 281 tamtéž). V druhém případě bude

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}(t) &= \mathbf{Q} \mathbf{R}(t) \left( \int_0^t \mathbf{R}(-\tau) \mathbf{H} \mathbf{m}(\tau) \mathbf{D}_w \mathbf{m}^H(\tau) \mathbf{H}^H \mathbf{R}^H(-\tau) d\tau \right) \mathbf{R}(t)^H + \\ &\quad + \mathbf{R}(t) \left( \int_0^t \mathbf{R}(-\tau) \mathbf{H} \mathbf{m}(\tau) \mathbf{D}_w \mathbf{m}^H(\tau) \mathbf{H}^H \mathbf{R}^H(-\tau) d\tau \right) \mathbf{R}(t)^H \mathbf{Q}^H + \\ &\quad + \mathbf{R}(t) \left( \mathbf{R}(-t) \mathbf{H} \mathbf{m}(t) \mathbf{D}_w \mathbf{m}^H(t) \mathbf{H}^H \mathbf{R}^H(-t) d\tau \right) \mathbf{R}(t)^H \end{aligned}$$

Stejně jako při využití stochastického diferenciálu tak dostaneme diferenciální vztah pro disperzi, který pak pro některé modulační funkce  $\mathbf{m}(t)$  bude možno řešit analyticky:

$$\dot{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{Q} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{Q}^H + \mathbf{H} \mathbf{m}(t) \mathbf{D}_w \mathbf{m}^H(t) \mathbf{H}^H \quad (78)$$

#### 4.3.1 Korelační metoda pro jednotlivé modulace

Nejjednodušší případ nastane, pokud  $\mathbf{m}(t) = m_0(t) \mathbf{I}$ , tzn. modulace je stejná pro všechny složky buzení. Připustíme však poněkud obecnější případ, kdy

$$\mathbf{m}(t) = \sum_{j=1}^k m_j(t) \mathbf{I}_j \quad \sum_{j=1}^k \mathbf{I}_j = \mathbf{I}$$

Matice  $\mathbf{I}_j$  jsou vhodné diagonální matice. Pro takové  $\mathbf{m}(t)$  dostane rovnice (78) tvar

$$\dot{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{Q}^H + \sum_{i,j=1}^k m_i(t)\overline{m_j(t)}\mathbf{H}\mathbf{I}_i\mathbf{D}_w\mathbf{I}_j\mathbf{H}^H$$

Ukáže se vhodným rozdělit poslední rovnici a zavést označení  $\mathbf{D}(t) = \sum_{i,j=1}^k \mathbf{D}_{ij}(t)$  kde

$$\dot{\mathbf{D}}_{ij}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{D}_{ij}(t) + \mathbf{D}_{ij}(t)\mathbf{Q}^H + m_i(t)\overline{m_j(t)}\mathbf{H}\mathbf{I}_i\mathbf{D}_w\mathbf{I}_j\mathbf{H}^H \quad (79)$$

Jednotlivé modulace mívají tvar součtu,  $m_j = \sum_{r=1}^s m_{jr}(t)$ . Zcela analogickým způsobem lze přidat další sumu a dvojici indexů, tvar rovnice se však nezmění. Není však v tuto chvíli nutno hledat to nejobecnější vyjádření, konkrétní výrazy mohou být připraveny podle okamžité potřeby.

**Skoková modulace** Uvažme nyní jako nejjednodušší případ situaci, kdy  $k = 1$ ,  $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$  a  $m_1(t) = h(t)$ . Heavisideova skoková funkce je  $h(t) = 1$  pro  $t \geq 0$  a je nulová jinde. Řešení nebude mít pochopitelně smysl v okolí počátku, neboť tam zvolená modulace hrubě nesplňuje předpoklad malé derivace. Pokud se položí

$$h(t)\overline{h(t)}\mathbf{H}\mathbf{D}_w\mathbf{H}^H = -\mathbf{Q}\mathbf{D}_s - \mathbf{D}_s\mathbf{Q}^H \quad (80)$$

řešení  $\mathbf{D}(t)$  bude mít tvar

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}(t)(\mathbf{D}(0) - \mathbf{D}_s)\mathbf{R}^H(t) + \mathbf{D}_s \quad (81)$$

Zde  $\mathbf{D}(0)$  je počáteční podmínka (zpravidla nulová) a matice  $\mathbf{D}_s$  je řešení Ljapunovovy maticové rovnice (80). Ověření, že (80) a (81) splňují rovnici (78), se provede přímým dosazením a úpravou.

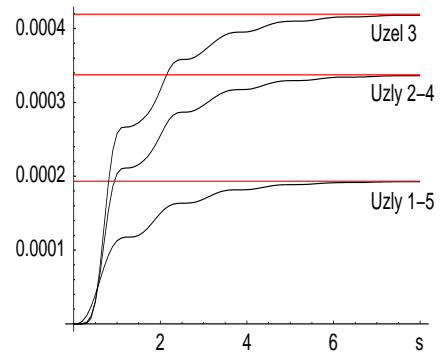
Matice  $\mathbf{D}_s$  má zvláštní význam, je rovna asymptotické hodnotě řešení pro  $t = \infty$ . Tato hodnota může poskytnout základní informace o konstrukci.

Chceme-li ilustrovat funkčnost metody na numerickém příkladě, pak nás nepřekvapí, že pro dost velká  $t$  je hodnota disperzní matice  $\mathbf{D}(t)$  numericky rovná  $\mathbf{D}_s$  a odpovídá přesnému řešení problému. Pro příklad 1 uvedený v příloze na straně 66 budou zajímavé prvky (1,1) a (3,3) matice  $\mathbf{D}_s$ , které obsahují výsledný rozptyl odezvy oscilátoru (prvek (1,1)) a pro kontrolu rozptyl budicího procesu (prvek (3,3)). Hodnoty  $\mathbf{D}_{s,11} = 0.25311$  a  $\mathbf{D}_{s,33} = 0.00010975$  přesnému řešení odpovídají, jak je možno ověřit v příloze.

Pro mostek z příkladu 2 pak vychází hodnoty rozptylu stacionární odezvy uvedené v tabulce 4 spolu s kontrolní hodnotou rozptylu buzení. Obrázek 18 na pravé straně ukazuje postupný nárůst odezvy. Jak bylo řečeno výše, je třeba jej brát s rezervou kvůli zanedbaným derivacím buzení.

$\times 10^{-4}$	uzly: 1,5	2,4	3	buzení
$t = 10$	1.9314	3.3711	4.1918	1.86397
$t = 100$	1.9325	3.3729	4.1940	1.86501
přesně	1.932	3.373	4.194	1.86501

Tabulka 4: Hodnoty rozptylu stacionární odezvy.



Obrázek 18: Průběh rozptylu odezvy mostku na skokové buzení.

**Jednoduchá exponenciála** Pro modulaci

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{I} m_0 h(t) e^{-\alpha t}$$

bude

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}(t)(\mathbf{D}(0) - \mathbf{D}_s)\mathbf{R}^H(t) + e^{-(\alpha+\bar{\alpha})t}\mathbf{D}_s$$

kde  $\mathbf{D}_s$  je řešení

$$(\mathbf{Q} + \alpha\mathbf{I})\mathbf{D}_s + \mathbf{D}_s(\mathbf{Q} + \alpha\mathbf{I})^H = -m_0\mathbf{H}\mathbf{D}_w\mathbf{H}^H$$

**Dvojitá exponenciála** Pro modulaci

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{I} m_0 h(t)(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

bude

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{D}(0)\mathbf{R}^H(t) + \sum_{\lambda=1}^4 d_\lambda \left( -\mathbf{R}(t)\mathbf{D}_s^\lambda\mathbf{R}^H(t) + e^{-g_\lambda t}\mathbf{D}_s^\lambda \right)$$

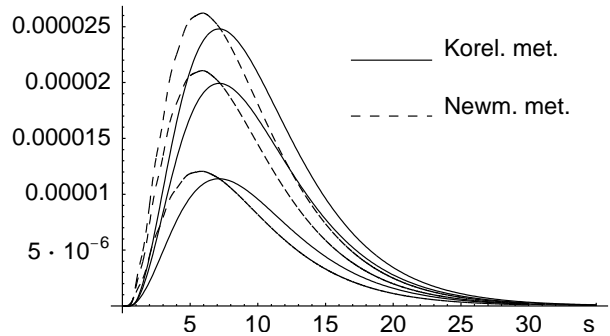
kde  $\mathbf{D}_s^\lambda$  je řešením následující Ljapunovovy rovnice

$$\left(\mathbf{Q} + \frac{g_\lambda}{2}\mathbf{I}\right)\mathbf{D}_{us}^\lambda + \mathbf{D}_{us}^\lambda\left(\mathbf{Q} + \frac{g_\lambda}{2}\mathbf{I}\right)^H = -a\mathbf{H}\mathbf{D}_w\mathbf{H}^H$$

$$g_1 = \alpha + \bar{\alpha} \quad g_2 = \alpha + \bar{\beta} \quad g_3 = \beta + \bar{\alpha} \quad g_4 = \beta + \bar{\beta}$$

$$d_1 = d_4 = 1 \quad d_2 = d_3 = -1$$

Nabízí se možnost srovnání výsledků výpočtu odezvy mostku z příkladu 2 zobecněnou stochastickou Newmarkovou metodou a metodou korelační. Výsledek srovnání je zobrazen na obr. 19, řešení vypočtené korelační metodou je naznačeno plnou čarou a řešení Newmarkovo čárkovaně. Zde se již výrazněji projevuje vliv zanedbané derivace modulační funkce, rozptyl odezvy vypočtený Newmarkovou metodou s krokem  $\Delta t = 0.01s$  nabíhá rychleji a dosahuje (mírně) vyšších hodnot.



Obrázek 19: Srovnání průběhu rozptylu odezvy mostku na exponenciální buzení pro metodu korelační a Newmarkovu.

**Polynomiální (splajnová) modulace** Posledním důležitým případem, který je třeba na tomto místě uvést, je modulace ve tvar polynomu. Speciálním případem pak bude splajnová modulace (36) uvedená výše. Necht  $\mathbf{m}(t) = \sum_{k=1}^m \mathbf{I}_k \left( \sum_{i=0}^r x_{ki} t^i \right)$ , kde  $x_{ki}$  jsou koeficienty polynomu pro  $j$ -tou složku buzení a necht  $\sum_{k=1}^m \mathbf{I}_k = \mathbf{I}$ . Pro takovou modulaci je možno použít výraz (79), ale zde to není příliš výhodné. Označme  $v_k(t) = \sum_{i=0}^r x_{ki} t^i$  a definujme koeficienty  $y_{kli}$  tak, že

$$v_k(t) \cdot \overline{v_l(t)} = \sum_{i=0}^{2r} y_{kli} t^i$$

Řešení pak hledáme ve tvaru

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}(t)(\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{X}_0)\mathbf{R}^H(t) + \sum_{i=0}^{2r} \mathbf{X}_i t^i \quad (82)$$

kde matice  $\mathbf{X}_i$  jsou dány vztahem

$$\mathbf{X}_i = \sum_{k,l=1}^n \sum_{s=0}^{2r-i} \left( y_{kl(i+s)} \mathbf{D}_{kls} \cdot \frac{(i+s)!}{i!} \right)$$

a  $\mathbf{D}_{kls}$  se vypočtou pomocí rekurentní formule

$$0 = \mathbf{Q}\mathbf{D}_{kls} + \mathbf{D}_{kls}\mathbf{Q}^H - \mathbf{D}_{kl(s-1)}$$

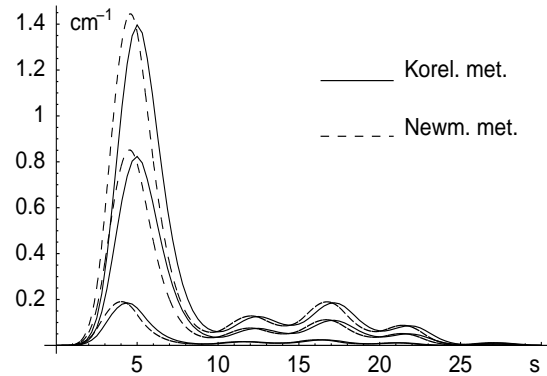
$$\mathbf{D}_{kl(-1)} = -\mathbf{H}\mathbf{I}_k\mathbf{D}_w\mathbf{I}_l\mathbf{H}^H$$

Je výhodné, že matice  $\mathbf{D}_{kls}$  nezávisí na konkrétních koeficientech polynomu a je možné je vypočítat dopředu, eventuálně je pak použít pro vícero pravých stran.

Použití popsaného postupu pro splajnovou modulaci je nasnadě: celý postup se provádí pro každý interval zvlášť a za počáteční podmínky  $\mathbf{D}(t_0)$  v rovnici (82) se dosadí konečná hodnota z předchozího intervalu. Korelační metoda tím sice částečně ztrácí svůj explicitní charakter, ale není to ztráta zásadní. Splajnové intervaly bývají poměrně dlouhé a hodnoty uvnitř těchto intervalů není nutno počítat, pokud o ně není zájem. Na druhou stranu je pravda, že zvláště v případě více složek buzení ( $m > 1$ ) složitost metody oproti (například) exponenciální modulaci značně narůstá.

Uveďme opět porovnání hodnot vypočtených Newmarkovou metodou a metodou korelační.

Jak je vidět z obrázku 20, konstrukce podle výsledků metody korelační (plná čára) opět reaguje pomaleji a trochu méně než jak ukazují výsledky metody Newmarkovy (čára přerušovaná), nicméně oproti případu exponenciálního buzení je rozdíl takřka zanedbatelný. Jako modulační funkce byl v obou případech použit identický splajn, zobrazený na obr. 16 na str. 41, spojitá AR(2) spektrální hustota má parametry (A.4). Strojový čas potřebný k výpočtům byl v obou případech podobný, nicméně výpočet Newmarkovou metodou používal krok  $\Delta t = 0.01s$  oproti desetinásobně delšímu kroku v případě metody korelační. Není to však zrovna čestné porovnání, neboť korelační metoda je vlastně explicitní vzorec.



Obrázek 20: Srovnání průběhu rozptylu odezvy mostku (příklad 2) na skutečné zemětřesení (záznam Sierra Madre) vyjádřené splajnem pro metodu korelační a Newmarkovu.

### 4.3.2 Chybová analýza

Jakou chybu působí zanedbání derivací modulační funkce? Numerické výpočty ukazují, že chyba metody paradoxně nezávisí tolik na chování modulační funkce  $m(t)$  jako na požadované spektrální hustotě buzení. Proč tomu tak je je možno nahlédnout na základě jednoduchého příkladu.

Náhodný proces o požadované spektrální hustotě (47) je v korelační metodě generován pomocí lineárního diferenciálního filtru druhého řádu, tedy jako řešení rovnice

$$x''(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_0 x(t) = w(t), x(0) = x_0, x'(0) = x_1 \quad (83)$$

kde  $w(t)$  je nekorelovaný náhodný proces. Předpoklad nulovosti derivace modulační funkce se projeví na dvou místech. Jednak při konstrukci matice  $\mathbf{Q}$  (viz (75)), kdy pravá strana

rovnice (50) by správně měla mít tvar

$$-\mathbf{F}\dot{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{G}\mathbf{v}(t) = -(\mathbf{F}\dot{\mathbf{m}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{m}(t))\mathbf{x}(t) - \mathbf{F}\mathbf{m}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$$

kde  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{m}(t)\mathbf{x}(t)$ , pravá strana popsaná maticí  $\mathbf{Q}$  však člen  $\mathbf{F}\dot{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)$  neobsahuje. Druhé místo, kde se zanedbává  $\dot{\mathbf{m}}(t)$ , je při samotné konstrukci filtru. Výstupem filtru není totiž vektor o složkách  $m(t)x(t)$  (kde  $x(t)$  je řešení z úlohy (83)), ale řešení  $x_m(t)$  úlohy

$$\ddot{x}_m(t) + \alpha_1\dot{x}_m(t) + \alpha_0x_m(t) = m(t)w(t)$$

s nulovými počátečními podmínkami. Ukazuje se, že tato druhá chyba je dominantní. Má-li filtr nulové počáteční podmínky, bude chyba

$$\begin{aligned} x_m(t) - m(t)x(t) &= \\ &= \int_0^t \left( e^{-\left(\frac{\alpha_1}{2} - \sqrt{\alpha_1^2/4 - \alpha_0}\right)(t-\tau)} - e^{-\left(\frac{\alpha_1}{2} + \sqrt{\alpha_1^2/4 - \alpha_0}\right)(t-\tau)} \right) \frac{(m(\tau) - m(t))}{2\sqrt{\alpha_1^2/4 - \alpha_0}} w(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_0 - \alpha_1^2/4}} \left[ \int_0^t e^{-\frac{\alpha_1}{2}(t-\tau)} \sin\left(\sqrt{\alpha_0 - \alpha_1^2/4}(t-\tau)\right) (m(\tau) - m(t)) w(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

Ať už byl bílý šum odhadnut konstantou  $w(t) = 1$  či jedním členem Fourierova rozvoje  $w(t) = e^{i\omega t}$ , lze integrál rozepsat — pro  $w(t) = 1$  a  $m(0) = 0$  jako

$$\begin{aligned} &= -\frac{e^{-\frac{\alpha_1}{2}t}}{\alpha_0\sqrt{\alpha_0 - \alpha_1^2/4}} \left( \sqrt{\alpha_0 - \alpha_1^2/4} \cos\left(t\sqrt{\alpha_0 - \alpha_1^2/4}\right) + \frac{\alpha_1}{2} \sin\left(t\sqrt{\alpha_0 - \alpha_1^2/4}\right) \right) m(t) - \\ &\qquad\qquad\qquad -\frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}\dot{m}(t) - \frac{\alpha_0 - (\alpha_1^2/4)^2}{\alpha_0^3}\ddot{m}(t) + R \end{aligned}$$

kde  $R$  je funkce vyšších derivací  $m(t)$ . Pro případ  $w(t) = e^{i\omega t}$  a  $m(0) = 0$  vypadá výraz podobně, první člen tlumí exponenciála, druhé dva nikoli.

Na velikosti chyby korelační metody má tedy podíl jak nenulovost derivací  $m(t)$ , tak vlastnosti spektrální hustoty, zejména faktor  $\alpha_1/\alpha_0^2$  a tlumení  $\alpha_1/2$ , které vyjadřuje rychlost útlumu prvního členu chyby. Jak se ukazuje při numerických experimentech, právě tyto dva faktory jsou určující pro velikost chyby, sama velikost derivace je podružná.

Na základě uvedeného odhadu je možno formulovat následující doporučení.

1. I přes nespojitě derivace je možno užívat po částech konstantní modulační funkci. Jednotlivé úseky však musí být dost dlouhé, aby člen  $e^{-t\alpha_1/2}$  stačil chybu vyhladit.
2. Pro vhodné spektrální hustoty buzení (tzn. je-li faktor  $\alpha_1/\alpha_0^2$  dost malý) je možno dosáhnout dobrých výsledků i pro po částech lineární modulační funkci.

### 4.3.3 Korelační metoda pro víceúrovňové rozklady

Korelační metoda je schopna bez zásadní modifikace přijmout buzení definované evolučním spektrem (43). V případě víceúrovňových rozkladů je možno buďto použít výraz (79), nebo, v případě splajnové modulace, rovnici (82). Je jen nutno správně rozšířit matice  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{G}$  z definice problému (50) tak, aby se v matici  $\mathbf{Q}$  v rovnici (75) opakovaly pro každou složku rozkladu. Bude také jednodušší, pokud budou všechny modulace zahrnovat intenzitu buďícího bílého šumu, aby bylo možno brát za  $\mathbf{D}_w$  jedničkovou matici.

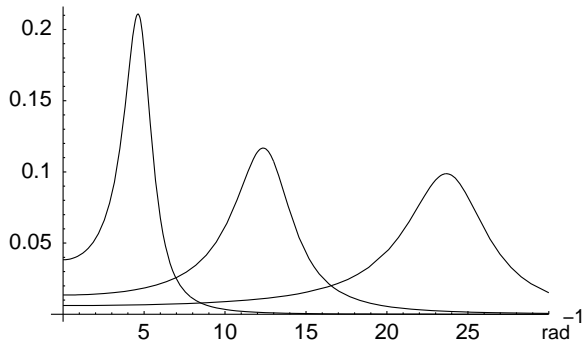
Při použití této metody je na místě obzvláštní opatrnost. Ve světle analýzy minulého odstavce je vidět, proč zřejmě nenajde výraznějšího uplatnění. Problém spočívá v tom, že spektrální hustoty jednotlivých složek víceúrovňových rozkladů mají (z principu) úzkopásmový charakter, na který je korelační metoda nešťastně citlivá. Druhý, již obecný, problém



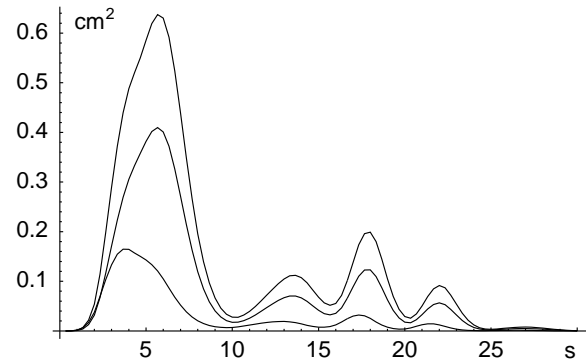
souvisí s odhadem spektrálních hustot jednotlivých složek buzení. Stavební konstrukce jsou často výrazně citlivé na několik málo úzkých frekvenčních pásem buzení, kam se AR aproximace jednotlivých složek trefit může, a nebo nemusí.

Proveďme výpočet odezvy známého mostku při buzení seizmogramem rozloženým waveletovou multiresolution analysis, jak bylo ukázáno na obrázcích 10 a 9 (strana 27). Časový průběh odezvy jednotlivých uzlů mostku je ukázán na obrázku 22. Na první pohled jistě zarazí zjištění, že maximální hodnota rozptylu odezvy není ani poloviční oproti případu nerozloženého buzení. Navíc se v průběhu výpočtu zjistilo, že zahrnutí vyšších detailů (druhý až čtvrtý) nepřineslo takřka nijakou kvantitativní změnu výsledku proti výpočtu pro samotný první detail. Vysvětlení jevu přinese podrobnější prozkoumání obrázku 21, kde je vyneseno průběh spektrálních hustot prvních tří detailů rozkladu, a jeho porovnání s obrázkem 32, který ukazuje spektrální hustotu stacionarizované části nerozloženého seizmogramu. Hodnota spektrální hustoty prvního detailu rozkladu pro  $\omega = 6.4 \text{ rad}^{-1}$ , což je první vlastní frekvence mostku, je takřka poloviční ( 0.043 ) oproti hodnotě spektrální hustoty nerozloženého seizmogramu ( 0.076 ). Hodnota druhé vlastní frekvence sice spadá do oblasti vrcholu spektrální hustoty třetího detailu, ale mizivé hodnoty jeho modulační funkce potlačí i tento příspěvek.

Na závěr přidejme dvě poznámky. Za prvé je zřejmé, že by jistě bylo možno sestavit příklad, který by potvrdil hodnotu víceúrovňové metody mimo jakékoli pochybnosti. A za druhé se ukazuje, že hlavním zdrojem problémů při určování odezvy konstrukce na (náhodné) buzení není samotný výpočet, jako spíše správná charakteristika budicího procesu.



Obrázek 21: Spektrálních hustoty tří detailů frekvenčně rozloženého seizmogramu



Obrázek 22: Rozptyl odezva mostku na buzení rozložené víceúrovňovým rozkladem .

#### 4.4 Korelační metoda s diskretním ARMA buzením

Tato metoda ideově vychází z metody korelační, bere jako základní vyjádření řešení rovnice (50) výraz s využitím Duhamelova integrálu. Při použití buzení popsaného diskretním ARMA procesem bude základní formulací metody rekurentní pravidlo pro výpočet kovarianční matice odezvy v diskretních bodech, podobně jako ve stochastické Newmarkově metodě. Ukáže se rovněž, že v tomto případě není nutno předpokládat speciální tvar modulační funkce ani zanedbávat její derivaci, neboť modulace se bude považovat za po částech lineární funkci. Práce s diskretním ARMA procesem je podobná jako v stochastické Newmarkově metodě.

Podobně jako v korelační metodě je nutno začít převodem rovnice (50) na soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu dvojnásobné dimenze

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{U}(t) + \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{m}(t)\dot{\eta}(t) + (\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{m}(t) + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{m}(t))\eta(t) \quad (84)$$

kde

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{pmatrix}_{2n \times m} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{pmatrix}_{2n \times m}$$

kde  $\mathbf{m}(t)$  je vektor modulačních funkcí takový, že  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{m}(t)\eta(t)$  a  $\eta(t)$  je funkce taková, že  $\eta(t_i) = \eta_i$ . Počáteční podmínka bude nulová,  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{0}$ . Řešení rovnice (84) je možno hledat pomocí Duhamelova integrálu ve tvaru

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{Q}(t-t_0)}\mathbf{U}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{Q}(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (85)$$

kde  $\mathbf{f}(t)$  je pravá strana rovnice (84) tzn.  $\mathbf{f}(t) = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{m}(t)\dot{\eta}(t) + (\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{m}(t) + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{m}(t))\eta(t)$

**Odvození rekurze pro řešení** Protože budící funkce  $\eta(t)$  je definovaná pouze hodnotami v bodech  $t_i$ , je možno ji uvažovat za po částech lineární:

$$\eta(t) = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + \eta_{i-1} \text{ pro } t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$$

Stejným způsobem se dá aproximovat (vektorová) modulační funkce  $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{m}(t_i)$ .

$$\mathbf{m}(t) \approx \frac{\boldsymbol{\mu}_i - \boldsymbol{\mu}_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + \boldsymbol{\mu}_{i-1} \text{ pro } t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$$

Integrál v rovnici (85) lze pak přepsat do tvaru

$$\mathbf{U}(t_j) = e^{\mathbf{Q}(t_j-t_0)}\mathbf{U}(t_0) + \sum_{i=1}^j e^{\mathbf{Q}(t_j-t_i)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\mathbf{Q}(t_i-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (86)$$

což odpovídá rekurentnímu vztahu

$$\mathbf{U}(t_j) = e^{\mathbf{Q}(t_j-t_{j-1})}\mathbf{U}(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{\mathbf{Q}(t_j-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (87)$$

Při označení  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,  $\mathbf{R}_i = \exp(\mathbf{Q}\Delta t_i)$  a

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{G} & \mathbf{x}_1 &= \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{R}_i - \mathbf{I}) \\ \mathbf{x}_0 &= \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{g} + \mathbf{F})\frac{1}{\Delta t_i^2} & \mathbf{x}_2 &= (\mathbf{x}_1 - \Delta t_i\mathbf{I})\mathbf{x}_0 \\ & & \mathbf{x}_3 &= (\mathbf{x}_1 - \Delta t_i\mathbf{R}_i)\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

vychází po dosazení za  $\mathbf{m}(t)$  a  $\eta(t)$  a po výpočtu výraz pro integrál

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{\mathbf{Q}(t_j-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau = \mathbf{S}_{1,i}\eta_i + \mathbf{S}_{2,i}\eta_{i-1}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1,i} &= (-\mathbf{x}_{2,i} - \mathbf{x}_{3,i})\boldsymbol{\mu}_{i-1} + (2\mathbf{x}_{2,i} - \mathbf{g})\boldsymbol{\mu}_i \\ \mathbf{S}_{2,i} &= (-\mathbf{x}_{2,i} - \mathbf{x}_{3,i})\boldsymbol{\mu}_i + (2\mathbf{x}_{3,i} + \mathbf{R}_i\mathbf{g})\boldsymbol{\mu}_{i-1} \end{aligned}$$

takže rekurentní formuli (87) je možno zapsat maticově

$$\mathbf{U}_{i+1} = e^{\mathbf{Q}\Delta t_i}\mathbf{U}_i + \mathbf{S}_{1,i}\eta_i + \mathbf{S}_{2,i}\eta_{i-1} \quad (88)$$

Případný konstantní časový krok  $\Delta t_i = \Delta t$  výpočet zjednoduší, není však nezbytný.

**Popis buzení** Podobně jako v případě stochastické Newmarkovy metody bude diskretní ARMA( $p, q$ ) proces (66) použit v maticovém tvaru.

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_n + \mathbf{q}_{n+1} \quad (89)$$

kde  $\mathcal{A}$  je definováno (68) a  $\boldsymbol{\eta}_n$  a  $\mathbf{q}_n$  jsou dány vztahem (69). Vektor neznámých posunů a rychlostí  $\mathbf{U}_i$  se opět rozšíří o neznámé hodnoty buzení  $\boldsymbol{\eta}_i$  a rovnice (88) rovnici (89). Po dosazení  $\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{pmatrix}$  bude

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{Z}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{z}_{i+1} \quad (90)$$

kde

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{Q}\Delta t_i} & \mathbf{L}_i \\ \mathbf{0} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix}$$

Matice  $\mathbf{L}_i$  budou mít tvar

$$\mathbf{L}_i = (\mathbf{S}_{1,i}, \mathbf{S}_{2,i}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$$

**Výpočet kovarianční matice** Výpočet disperze odezvy je možno provést podle definice kovarianční funkce pro proměnné  $\mathbf{y}_i$  definované rekurencí (90) za předpokladu, že matematický střed odezvy bude nulový. To je splněno jednak pro lineární úlohy (50), jednak pro symetrické nelineární úlohy.

Kovariance systému bude

$$\mathbf{K}_{i+1,i+1} = \mathbf{E}\mathbf{y}_{i+1}\mathbf{y}_{i+1}^T = \mathbf{Z}_i \mathbf{E}\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{Z}_i^T + \mathbf{Z}_i \mathbf{E}\mathbf{y}_i \mathbf{z}_{i+1}^T + \left( \mathbf{Z}_i \mathbf{E}\mathbf{y}_i \mathbf{z}_{i+1}^T \right)^T + \mathbf{E}\mathbf{z}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^T$$

Stejným postupem jako u stochastické Newmarkovy metody se ukáže, že platí:

$$\mathbf{E}\mathbf{z}_{i+1} \mathbf{z}_{i+1}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad c = \left( 1 + \sum_{i=1}^q b_i^2 \right) \sigma^2$$

kde nenulový prvek  $c$  je na pozici  $(n+1, n+1)$ , je-li  $n$  délka vektoru  $\mathbf{U}_i$ . Pro výpočet  $\mathbf{Z}_i \mathbf{E}\mathbf{y}_i \mathbf{z}_{i+1}^T$  platí rovnice analogicky k (73) a (74)

$$\mathbf{Z}_i \mathbf{E}\mathbf{y}_i \mathbf{z}_{i+1}^T = \sum_{j=1}^q \mathbf{Z}_i^j \boldsymbol{\xi}_j$$

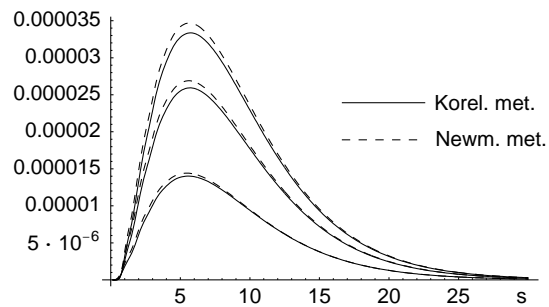
Matice  $\boldsymbol{\xi}_j$  jsou definovány rovnicí (73).

**Numerický příklad** Korelační metoda s ARMA buzením se v mnohém podobá stochastické Newmarkově metodě. Protože užívá lineární aproximaci budoucího procesu, bude mít s Newmarkovou metodou stejný řád přesnosti. Přesto dává v některých případech, zvláště při větších délkách kroku, lepší výsledky.

Pro příklad 1 jsou výsledné rozptyly pro jednotlivé typy buzení vypsány v tabulce 5. Pro porovnání, tabulka 2 s výsledky Newmarkovy metody je na straně 39.

$\Delta t$	buzení		přesné řešení
	AR(2)	ARMA(2, 1)	
0.125	0.22255	0.23464	0.253115
0.01	0.25437	0.25437	

Tabulka 5: Výsledky korelační metody s ARMA buzením pro příklad 1



Obrázek 23: Odezva mostku pro exponenciální modulaci,  $\Delta t = 0.125$

Pro příklad 2 je v obrázku 23 vidět, že pro  $\Delta t = 0.125$  dává korelační metoda s ARMA buzením mírně lepší výsledek než stochastická Newmarkova metoda. Pro  $\Delta t = 0.01$  jsou výsledky obou metod shodné.

Obrázek porovnávající řešení úlohy se splajnovou modulací oběma metodami by nebyl zajímavý, obě řešení vychází stejně. Zajímavější je, že při použití stejných podpůrných procedur byl výpočet metodou korelační s ARMA buzením zhruba  $1.3\times$  rychlejší než výpočet stochastickou Newmarkovou metodou, 36 s oproti 50 s.

#### 4.5 Metoda spektrálních rozkladů

Původní varianta metody spektrálních rozkladů uvažuje rozklad nestacionárních procesů na pravé straně ve tvaru

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{m}(t) \cdot \mathbf{v}_s(t)$$

$\mathbf{v}_s(t)$  – sloupcový vektor stacionárních gaussovských procesů

$\mathbf{m}(t)$  – čtvercová matice ( $m \times m$ ) deterministických modulačních funkcí. Matice  $\mathbf{m}$  se zpravidla uvažuje diagonální.

Počáteční podmínky rovnice se zpravidla uvažují homogenní, čímž se má na mysli, že zemětřesení zastihne budovu v klidu.

$$\mathbf{u}(0) = 0 \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = 0$$

Vzhledem k tomu, že soustava je lineární a buzení se předpokládá gaussovské, bude i řešení gaussovské. Díky tomu postačí pro úplnou statistickou charakteristiku chování soustavy stanovení dvou prvních stochastických momentů - matematický střed a kovarianční funkci.

Podle teorie stochastických procesů lze napsat buzení ve tvaru spektrálního rozkladu popsaného vztahy

$$\mathbf{v}_s(t) = \mathbf{v}_{sc}(t) + \mathbf{v}_{sd}(t) \quad (91)$$

$$\mathbf{v}_{sc}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\Phi(\omega)$$

takže

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{m}(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\Phi(\omega) + \mathbf{v}_{sd}(t) \right)$$

$\mathbf{v}_{sd}(t)$  – vektor matematických středů stacionární části buzení  $\mathbf{v}_s(t)$

$\mathbf{v}_{sc}(t)$  – centrované části stacionárních procesů  $\mathbf{v}_s(t)$

$\Phi$  – spektrální diferenciály stacionárních procesů  $\mathbf{v}_{sc}(t)$ . Podléhají ortogonalitě ve smyslu

$$\mathbf{E}\{d\Phi(\omega_1)\Phi(\omega)^H\} = \delta(\omega_1 - \omega)\mathbf{S}_v(\omega)d\omega_1d\omega \quad (92)$$

kde

$\mathbf{S}_v(\omega)$  — čtvercová matice vzájemných spektrálních hustot procesů  $\mathbf{v}_{sc}(t)$

Řešení soustavy  $\mathbf{u}(t)$  je rovněž možno psát ve tvaru integrálního rozkladu

$$\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\omega, t) d\Phi(\omega) + \mathbf{u}_d(t) \quad (93)$$

kde  $\mathbf{u}_d(t)$  je deterministická složka řešení a  $\mathbf{U}(\omega, t)$  – matice  $(n \times m)$  neznámých funkcí. Náhodný proces  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\omega, t) d\Phi(\omega)$  je centrováný díky linearitě úlohy a předpokládanému nulovému středu buzení.

Dosaďme vztahy (91) a (93) do rovnice (50). Předpokládejme rovněž, že  $\mathbf{U}(\omega, t)$  splňuje předpoklady věty o derivování za integračním znaménkem. Tak vychází

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_d(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_d(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}_d(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{C}\mathbf{U}(\omega, t) \right) d\Phi(\omega) = \\ & = -\mathbf{F}(\dot{\mathbf{m}}(t)\mathbf{v}_{sc}(t) + i t \mathbf{m}(t)\mathbf{v}_{sc}(t) + \dot{\mathbf{m}}(t)\mathbf{v}_{sd}(t) + \mathbf{m}(t)\dot{\mathbf{v}}_{sd}(t)) - \mathbf{G}\mathbf{m}(t)(\mathbf{v}_{sc}(t) + \mathbf{v}_{sd}(t)) \end{aligned} \quad (94)$$

Aplikujme na předchozí rovnici operátor matematického středu. Neboť v tomto případě je matematický střed záměnný s integrováním, centrované části náhodných procesů vypadnou a zbude jen deterministická část rovnice

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_d(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_d(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}_d(t) &= -(\mathbf{F}\dot{\mathbf{m}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{m}(t))\mathbf{v}_{sd}(t) - \mathbf{F}\mathbf{m}(t)\dot{\mathbf{v}}_{sd}(t) \\ \mathbf{u}_d(0) &= 0; \quad \dot{\mathbf{u}}_d(0) = 0 \end{aligned}$$

Pro osamostatnění stochastické části rovnice vynásobíme napřed rovnici faktorem  $\int_{-\infty}^{\infty} d\overline{\Phi}(\omega)^T$  a na celek uplatníme matematický střed. Použitím vztahu (17) dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left( \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{C}\mathbf{U}(\omega, t) \right) d\omega = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\mathbf{F}(\dot{\mathbf{m}}(t)e^{i\omega t} + i\omega \mathbf{m}(t)e^{i\omega t}) - \mathbf{G}\mathbf{m}(t)e^{i\omega t} \right) d\omega \end{aligned}$$

Neboť vztah musí platit pro každé  $t$ , platí rovnost i pro integrandy a vznikne rovnice pro neznámou matici  $\mathbf{U}(\omega, t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{C}\mathbf{U}(\omega, t) &= -(\mathbf{F}(\dot{\mathbf{m}}(t) + i\omega \mathbf{m}(t)) + \mathbf{G}\mathbf{m}(t))e^{i\omega t} \\ \mathbf{U}(\omega, t)|_{t=0} &= 0; \quad \dot{\mathbf{U}}(\omega, t)|_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

Při znalosti řešení  $\mathbf{U}(\omega, t)$  bude možno spočítat kovarianční matici odezvy (93) z definice ( $\mathbf{E}\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_d(t)$ ). Pro další úpravy je nutno opět použít vztah (92)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_u(t_1, t_2) &= \mathbf{E} \left[ (\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{u}_d(t_1)) \left( \overline{\mathbf{u}(t_2) - \mathbf{u}_d(t_2)} \right)^T \right] = \\ &= \mathbf{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\omega_1, t_1) d\Phi(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathbf{U}(\omega_2, t_2) d\Phi(\omega_2)^T} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\omega, t_1) \mathbf{S}_v(\omega) \mathbf{U}(\omega, t_2)^H d\omega \end{aligned} \quad (96)$$

Řešení soustavy (95) je možno nalézt pomocí Laplaceovy transformace. Vzhledem k nulovým počátečním podmínkám bude

$$(\mathbf{M}p^2 + \mathbf{B}p + \mathbf{C})\mathbf{U}^*(\omega, p) = -(\mathbf{F}p + \mathbf{G})\mathbf{m}^*(p - i\omega) + \mathbf{F}\mathbf{m}(0)$$

Maticový polynom  $\mathbf{Q}(p) = (\mathbf{M}p^2 + \mathbf{B}p + \mathbf{C})$  na levé straně je možno invertovat za předpokladu, že jeho zobecněná vlastní čísla (kořeny determinantu) jsou nenulová a vesměs různá. V takovém případě je možno psát podle definice inverzní matice

$$\mathbf{Q}^{-1}(p) = \left| \frac{\Delta_{ij}(p)}{\Delta(p)} \right| = \sum_{l=1}^{2n} \left( \mathbf{S}_l \frac{1}{p - p_l} \right), \quad \mathbf{S}_l = \left| \frac{\Delta_{ij}(p)}{\Delta'(p)} \right| \quad (97)$$

kde  $\Delta(p)$ ,  $\Delta'(p)$ ,  $\Delta_{ij}(p)$  je determinant  $\mathbf{Q}(p)$ , jeho derivace a determinant algebraického doplnku prvku  $i, j$  v bodě  $p$  a  $p_l$  jsou kořeny determinantu. Pro uvažované úlohy tvoří komplexně sdružené dvojice.

Výpočet prvků rozkladu (97) je poměrně náročná operace, jakkoli není nutno jej počítat uvedeným způsobem pomocí determinantů. V příloze B je podrobně odvozena numericky vhodnější metoda.

Pro  $\mathbf{U}^*$  tak dostaneme

$$\mathbf{U}^*(\omega, p) = \sum_{l=1}^{2n} \left( \mathbf{S}_l \frac{1}{p - p_l} \right) (-\mathbf{F}p + \mathbf{G})\mathbf{m}^*(p - i\omega) + \mathbf{F}\mathbf{m}(0)$$

a po zpětné transformaci

$$\mathbf{U}(\omega, t) = - \sum_{l=1}^{2n} \int_0^t \left( \mathbf{S}_l e^{p_l t - (p_l - i\omega)\tau} \right) (\mathbf{F}(\dot{\mathbf{m}}(\tau) + i\omega \mathbf{m}(\tau)) + \mathbf{G} \mathbf{m}(\tau)) d\tau \quad (98)$$

Dosadíme (98) do (96)

$$\mathbf{K}_u(t_1, t_2) = \sum_{k,l=1}^{2n} \mathbf{S}_l \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \left( e^{p_l t_1 - (p_l - i\omega)\tau_1} \right) \mathbf{S}_m(\omega, \tau_1, \tau_2) \overline{(e^{p_k t_2 - (p_k - i\omega)\tau_2})} d\tau_2 d\tau_1 d\omega \right) \mathbf{S}_k^H \quad (99)$$

kde

$$\mathbf{S}_m(\omega, \tau_1, \tau_2) = (\mathbf{F}\dot{\mathbf{m}}(\tau_1) + (i\omega\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{m}(\tau_1)) \mathbf{S}_v(\omega) \overline{(\mathbf{F}\dot{\mathbf{m}}(\tau_2) + (i\omega\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{m}(\tau_2))}^T \quad (100)$$

kde  $\mathbf{S}_v(\omega)$  je matice vzájemných spektrálních hustot procesů, které působí na soustavu. Nyní je třeba se vypořádat s integrály uvnitř rovnice (99). To je možné v zásadě dvojím způsobem: numericky nebo analyticky.

**Explicitní řešení** Nyní již záleží na konkrétní volbě modulační funkce a spektrální hustoty buďícího procesu. Pro některé volby je možno vyčíslit všechny tři integrály v rovnici (99) explicitně.

Uvažujme proto zjednodušený případ, kdy modulační matici je možno psát  $\mathbf{m}(t) = \mu(t)\mathbf{m}_0$ , kde  $\mu(t)$  je skalární funkce a  $\mathbf{m}_0$  je diagonální matice. Za tohoto předpokladu se ukáže, že po dosazení (100) do (99) bude možno vnitřní integrály osamostatnit a definovat

$$\chi(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \mu(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau \quad \varphi(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \dot{\mu}(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau \quad (101)$$

Po nepříjemném roznásobení vyjde

$$\mathbf{K}_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{2n} \sum_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}} \mathbf{S}_l \mathbf{X} \mathbf{m}_0 \mathbf{S}_v(\omega) \mathbf{m}_0^T \mathbf{Y}^T \mathbf{S}_k^H \lambda_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) d\omega \quad (102)$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{F}\mathbf{F}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) &= (\varphi(t_1, p_l, \omega) + i\omega\chi(t_1, p_l, \omega)) (\phi(t_2, \bar{p}_k, -\omega) - i\omega\chi(t_2, \bar{p}_k, -\omega)) \\ \lambda_{\mathbf{F}\mathbf{G}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) &= (\varphi(t_1, p_l, \omega) + i\omega\chi(t_1, p_l, \omega)) \chi(t_2, \bar{p}_k, -\omega) \\ \lambda_{\mathbf{G}\mathbf{F}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) &= \chi(t_1, p_l, \omega) (\phi(t_2, \bar{p}_k, -\omega) - i\omega\chi(t_2, \bar{p}_k, -\omega)) \\ \lambda_{\mathbf{G}\mathbf{G}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) &= \chi(t_1, p_l, \omega) \chi(t_2, \bar{p}_k, -\omega) \end{aligned}$$

Dalšího zjednodušení lze dosáhnout předpokladem, že matice  $\mathbf{S}_v(\omega) = \mathbf{S}_0\psi(\omega)$ . V takovém případě je možno integraci provádět pouze pro skalární funkce pro každý součin předchozí rovnice zvlášť. Bude tedy třeba vyjádřit integrály funkcí

$$\begin{aligned} f_0^{\varphi\varphi}(t_1, t_2, p_1, p_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)\varphi(t_1, p_1, \omega)\varphi(t_2, p_2, -\omega) d\omega \\ f_j^{\varphi\chi}(t_1, t_2, p_1, p_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^j \psi(\omega)\varphi(t_1, p_1, \omega)\chi(t_2, p_2, -\omega) d\omega \quad j = 0, 1 \\ f_j^{\chi\chi}(t_1, t_2, p_1, p_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^j \psi(\omega)\chi(t_1, p_1, \omega)\chi(t_2, p_2, -\omega) d\omega \quad j = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (103)$$

Díky tomu, že spektrální hustota  $\psi(\omega)$  je sudá funkce, bude

$$f_j^{\chi\varphi}(t_1, t_2, p_1, p_2) = (-1)^j f_j^{\varphi\chi}(t_2, t_1, p_2, p_1) \quad (104)$$

Že symetrie (104) platí je zřejmé z dosazení:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^j \psi(\omega)\chi(t_1, p_1, \omega)\varphi(t_2, p_2, -\omega) d\omega = (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} \omega^j \psi(-\omega)\varphi(t_2, p_2, \omega)\chi(t_1, p_1, -\omega) d\omega$$

Při použití substituce  $\mathbf{m}_0\mathbf{S}_0\mathbf{m}_0^T = \mathbf{S}_m$  přejde hledaná matice kovariančních funkcí (102) ve výraz

$$\mathbf{K}_u(t_1, t_2) = \sum_{k,l=1}^{2n} \sum_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}} \mathbf{S}_l \mathbf{X} \mathbf{S}_m \mathbf{Y}^T \mathbf{S}_k^H \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) d\omega$$

a integrály funkcí  $\lambda_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\cdot)$  budou mít vyjádření

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{F}\mathbf{F}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\mathbf{F}\mathbf{F}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) d\omega = f_0^{\varphi\varphi}(t_1, t_2, p_l, \bar{p}_k) - i f_1^{\varphi\chi}(t_1, t_2, p_l, \bar{p}_k) - \\ &\quad - i f_1^{\varphi\chi}(t_2, t_1, \bar{p}_k, p_l) + f_2^{\chi\chi}(t_1, t_2, p_l, \bar{p}_k) \\ \Lambda_{\mathbf{F}\mathbf{G}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\mathbf{F}\mathbf{G}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) d\omega = f_0^{\varphi\chi}(t_1, t_2, p_l, \bar{p}_k) + i f_1^{\chi\chi}(t_1, t_2, p_l, \bar{p}_k) \\ \Lambda_{\mathbf{G}\mathbf{F}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\mathbf{G}\mathbf{F}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) d\omega = f_0^{\varphi\chi}(t_2, t_1, \bar{p}_k, p_l) - i f_1^{\chi\chi}(t_1, t_2, p_l, \bar{p}_k) \\ \Lambda_{\mathbf{G}\mathbf{G}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\mathbf{G}\mathbf{G}}(t_1, t_2, p_l, p_k, \omega) d\omega = f_0^{\chi\chi}(t_1, t_2, p_l, \bar{p}_k) \end{aligned} \quad (105)$$

Dalšího zobecnění je možno dosáhnout, vezme-li se v úvahu složitější modulace

$$\mathbf{m}(t) = \sum_{q=0}^r \mu_q(t) \mathbf{m}_q$$

kde  $\mu_q(t)$  jsou skalární funkce a  $\mathbf{m}_q$  jsou diagonální matice. Takový rozklad umožní zavedení různých modulací pro jednotlivé složky buzení. Zobecnění je přímočaré: analogicky rovnici (101) definujeme funkce

$$\chi_q(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \mu_q(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau \quad \text{a} \quad \varphi_q(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \dot{\mu}_q + q(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau$$

Mimo označení  $\mathbf{m}_s \mathbf{S}_0 \mathbf{m}_q^T = \mathbf{S}_{msq}$  je ještě třeba dovybavit funkce typu  $f_j^{\varphi\chi}$  dalšími indexy  $f_j^{\varphi_s \chi_q}$ . Kovarianční matice dostane tvar

$$\mathbf{K}_u(t_1, t_2) = \sum_{k,l=1}^{2n} \sum_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}} \mathbf{S}_l \mathbf{X} \left( \sum_{s,q=1}^r \mathbf{S}_{msq} \Lambda_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^{s,q} \right) \mathbf{Y}^T \mathbf{S}_k^H \quad (106)$$

Definice symbolů  $\Lambda_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^{s,q}$  přirozeně vyplývá, pokud se v rovnici (105) použijí symboly  $f_j^{\varphi_s \chi_q}$ .

### 4.5.1 Heavisideova modulace

Nejjednodušší případ je charakterizován modulací  $\mu(t) = h(t)$ . Protože Heavisideova skoková funkce není spojitá v nule, uvažuje se derivace jako Diracova delta funkce,  $\dot{\mu}(t) = \delta(t)$ .

$$\chi(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \mu(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau = \frac{e^{pt} - e^{i\omega t}}{p - i\omega} h(t)$$

$$\varphi(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \dot{\mu}(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau = e^{pt} \left( h(t) - \frac{1}{2} \right)$$

Spektrální hustotu  $\psi$  pro tentokrát uvažujeme ve tvaru spojitého AR(1) procesu

$$\psi(\omega) = \frac{\sigma_0^2}{\pi} \frac{a}{(a^2 + \omega^2)}$$

Integrály (103) budou mít tvar

$$f^{\varphi\varphi}(t_1, t_2, p_1, p_2) = \frac{\sigma^2}{4} e^{p_1 t_1 + p_2 t_2}$$

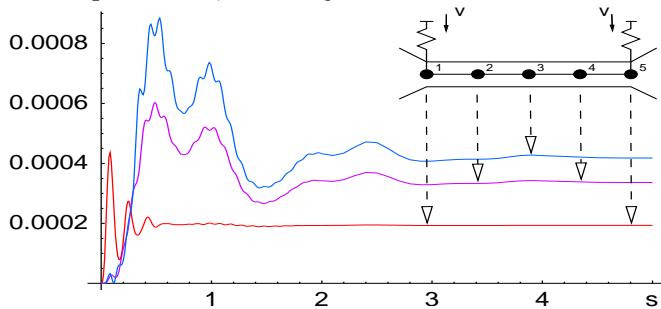
$$f_j^{\varphi\chi}(t_1, t_2, p_1, p_2) = -\frac{i^j \sigma^2 e^{p_1 t_1}}{2(a^2 - p_2^2)} \left( (-a)^j (a - p_2) e^{-at_2} + e^{p_2 t_2} \left( a^j (a + p_2) - 2p_2^j a \right) \right) \quad (j = 0, 1)$$

$$f_j^{\chi\chi}(t_1, t_2, p_1, p_2) = \sigma^2 a^j \left( \frac{(-i)^j e^{p_1 t_1 - a t_2}}{(a - p_1)(a + p_2)} + \frac{i^j (e^{p_2 t_2 - a t_1} - e^{p_1 t_1 + p_2 t_2} - e^{a(t_2 - t_1)})}{(a + p_1)(a - p_2)} \right) +$$

$$+ 2\sigma^2 a \left( \frac{(-i)^j e^{p_1(t_1 - t_2)} p_1^j}{(p_1 + p_2)(p_1^2 - a^2)} + \frac{i^j e^{p_1 t_1 + p_2 t_2} p_2^j}{(p_1 + p_2)(a^2 - p_2^2)} \right) \quad (j = 0, 1, 2)$$

pro  $t_1 > t_2$ . Modifikace uvedeného případu pro AR(2) spektrální hustotu (ve tvaru (107)) je rovněž možná, byla provedena, nicméně vzorce jsou (vzhledem k okrajovému významu skokové modulace) nezajímavé. Vzorce pro AR(2) buzení bylo použito při numerických testech uvedených dále v tomto odstavci.

Neboť metoda spektrálních rozkladů, podobně jako metoda korelační, je spíše explicitní vzorec řešení než numerická metoda, bylo by záhodno, aby dávala přesné hodnoty. Vskutku, pro příklad 1 dává metoda hodnotu rozptylu řešení pro  $t = 8$  rovnou 0.253112, což přesná hodnota je. Narozdíl od metody korelační zde můžeme sledovat přechodový děj při skokovém nástupu buzení, které je



Obrázek 24: Výpočet odezvy mostku na skokové buzení metodou spektrálních rozkladů

vyjádřeno Heavisideovou modulací.

hodnoty $\times 10^{-4}$	uzly mostku		
	1,5	2,4	3
$t = 8$	1.93253	3.37277	4.19376
přesně	1.932	3.373	4.194

Tabulka 6: Hodnoty rozptylu odezvy mostku pro  $t = 8$ .

Z výpočtu úlohy 2 dostáváme již pro  $t = 8$  hodnoty rozptylu numericky rovné asymptotickým hodnotám stacionární odezvy, pro porovnání jsou uvedené v tabulce 6 spolu s kontrolní hodnotou rozptylu buzení. Obrázek 24 ukazuje průběh odezvy těsně po nástupu buzení. Vidíme zde pochopitelný přechodový jev, který jsme se však marně pokoušeli modelovat Newmarkovou metodou.



### 4.5.2 Modulace dvojitě exponenciály

Nyní uvažujme modulaci  $\mu(t) = h(t) (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ . Derivace v nule opět neexistuje, funkce sama je tam však spojitá. Pro  $t > 0$  uvažujeme derivaci  $\dot{\mu}(t) = -\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}$ . V bodě  $t = 0$  ji nahradíme derivací zprava,  $\dot{\mu}(0) = \beta - \alpha$  a omezíme se na případ  $t \geq 0$

$$\chi(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \mu(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau = \frac{e^{(i\omega-\beta)t} - e^{pt}}{p + \beta - i\omega} - \frac{e^{(i\omega-\alpha)t} - e^{pt}}{p + \alpha - i\omega}$$

$$\varphi(t, p, \omega) = e^{pt} \int_0^t \dot{\mu}(\tau) e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau = -\beta \frac{e^{(i\omega-\beta)t} - e^{pt}}{p + \beta - i\omega} + \alpha \frac{e^{(i\omega-\alpha)t} - e^{pt}}{p + \alpha - i\omega}$$

Spektrální hustotu  $\psi$  uvažujeme jako pro spojitý AR(2) proces ve tvaru

$$\psi(\omega) = \frac{\sigma_0^2}{\pi} \frac{2a^2b}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \quad (107)$$

Zavedme pomocnou funkci  $q$

$$q(t, x, y, p_1, p_2, j, \omega) = \frac{e^{i\omega t} \omega^j}{(x + p_1 - i\omega)(y + p_2 + i\omega) ((a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2)}$$

a druhou pomocnou funkci  $g$  (zkráceně budeme psát  $q(t)$  namísto  $q(t, x, y, p_1, p_2, j, \omega)$ )

$$g(x, y, t_1, t_2, p_1, p_2, j, \omega) = e^{-xt_1 - yt_2} q(t_1 - t_2) - e^{p_2 t_2 - xt_1} q(-t_2) - e^{p_1 t_1 - yt_2} q(t_1) + e^{p_1 t_1 - p_2 t_2} q(0)$$

Pro ozřejnění: na místo parametrů  $x$  a  $y$  přijdou parametry  $\alpha$  a  $\beta$  modulační funkce. Tato nová funkce  $g$  závisí na  $\omega$  již pouze prostřednictvím funkce  $q$ . Proto její integrál  $G$

$$G(x, y, t_1, t_2, p_1, p_2, j) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, t_1, t_2, p_1, p_2, j, \omega) d\omega$$

bude mít stejné vyjádření jako  $g(\cdot)$  s dosazeným  $Q(t, x, y, p_1, p_2, j) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t, x, y, p_1, p_2, j, \omega) d\omega$  za  $q(\cdot)$ .

$$G(\cdot) = e^{-xt_1 - yt_2} Q(t_1 - t_2) - e^{p_2 t_2 - xt_1} Q(-t_2) - e^{p_1 t_1 - yt_2} Q(t_1) + e^{p_1 t_1 - p_2 t_2} Q(0)$$

Z následujícího vzorce bude vidět vztah uvažované modulační funkce  $\mu(t) = h(t) (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ , pomocné funkce  $Q$  a hledaných funkcí (103). Platí totiž (opět budeme vynechávat argumenty  $t_1, t_2, p_1, p_2$ , takže například namísto dlouhého  $G(\alpha, \alpha, t_1, t_2, p_1, p_2, 0)$  napíšeme  $G(\alpha, \alpha, 0)$ )

$$f^{\varphi\varphi}(t_1, t_2, p_1, p_2) = \frac{2a^2b\sigma^2}{\pi} (\alpha^2 G(\alpha, \alpha, 0) - \beta\alpha G(\alpha, \beta, 0) - \beta\alpha G(\beta, \alpha, 0) + \beta^2 G(\beta, \beta, 0))$$

$$f_j^{\varphi X}(t_1, t_2, p_1, p_2) = \frac{2a^2b\sigma^2}{\pi} (-\alpha G(\alpha, \alpha, j) + \alpha G(\alpha, \beta, j) + \beta G(\beta, \alpha, j) - \beta G(\beta, \beta, j))$$

$$f_j^{X\varphi}(t_1, t_2, p_1, p_2) = \frac{2a^2b\sigma^2}{\pi} (-\alpha G(\alpha, \alpha, j) + \beta G(\alpha, \beta, j) + \alpha G(\beta, \alpha, j) - \beta G(\beta, \beta, j))$$

$$f_j^{XX}(t_1, t_2, p_1, p_2) = \frac{2a^2b\sigma^2}{\pi} (G(\alpha, \alpha, j) - G(\alpha, \beta, j) - G(\beta, \alpha, j) + G(\beta, \beta, j))$$

Připomeňme však, že platí

$$f_j^{X\varphi}(t_1, t_2, p_1, p_2) = (-1)^j f_j^{\varphi X}(t_2, t_1, p_2, p_1)$$

Integrál  $Q$  funkce  $q(t, x, y, p_1, p_2, j)$  vypočteme pomocí residuové věty. Výsledkem bohužel není jednoduchá funkce, dostaneme samostatné výrazy pro záporné a kladné  $t$  jakož i pro

kladné resp. záporné hodnoty  $Re(p_1 + x)$ ,  $Re(p_2 + y)$ . Jednotlivá residua v bodech  $z_i$  jsou vyčíslena takto:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{\frac{i}{8} (ib + \sqrt{a^2 - b^2})^j e^{-(bt) + i\sqrt{a^2 - b^2}t}}{b(-a^2 + b^2 - ib\sqrt{a^2 - b^2})(b - i\sqrt{a^2 - b^2} + p_1 + x)(-b + i\sqrt{a^2 - b^2} + p_2 + y)} & ; z_1 &= t (ib + \sqrt{a^2 - b^2}) \\
 R_2 &= \frac{i(-1)^j (-ib + \sqrt{a^2 - b^2})^j e^{-(bt) - i\sqrt{a^2 - b^2}t}}{b(-a^2 + b^2 + ib\sqrt{a^2 - b^2})(b + i\sqrt{a^2 - b^2} + p_1 + x)(b + i\sqrt{a^2 - b^2} - p_2 - y)} & ; z_2 &= t (ib - \sqrt{a^2 - b^2}) \\
 R_3 &= \frac{\frac{i}{8} (-ib + \sqrt{a^2 - b^2})^j e^{(b+i\sqrt{a^2 - b^2})t}}{b(-a^2 + b^2 + ib\sqrt{a^2 - b^2})(b + i\sqrt{a^2 - b^2} - p_1 - x)(b + i\sqrt{a^2 - b^2} + p_2 + y)} & ; z_3 &= t (-ib + \sqrt{a^2 - b^2}) \\
 R_4 &= \frac{\frac{-i}{8} (-1)^j (ib + \sqrt{a^2 - b^2})^j e^{(b-i\sqrt{a^2 - b^2})t}}{b(-a^2 + b^2 - ib\sqrt{a^2 - b^2})(-b + i\sqrt{a^2 - b^2} + p_1 + x)(b - i\sqrt{a^2 - b^2} + p_2 + y)} & ; z_4 &= t (-ib - \sqrt{a^2 - b^2}) \\
 R_5 &= \frac{i(-i)^j (p_1 + x)^j e^{t(p_1 + x)}}{(a^4 + 2a^2(p_1 + x)^2 + (p_1 + x)^2(-4b^2 + (p_1 + x)^2))(p_1 + p_2 + x + y)} & ; z_5 &= -it(p_1 + x) \\
 R_6 &= \frac{-i^j (p_2 + y)^j e^{-t(p_2 + y)}}{(a^4 + 2a^2(p_2 + y)^2 + (p_2 + y)^2(-4b^2 + (p_2 + y)^2))(p_1 + p_2 + x + y)} & ; z_6 &= it(p_2 + y)
 \end{aligned}$$

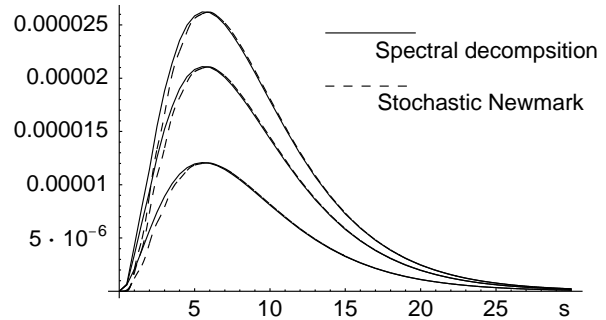
Residua pro případ nulového  $t$  vyjdou stejně jako při dosazení nulového  $t$  do residuí  $R_1$  až  $R_6$  výše pro póly vzniklé vypuštěním  $t$  z výrazů pro  $z_1$  až  $z_6$ . Podle Jordanova lemmatu bude integrál  $Q(t, x, y, p_1, p_2, j)$  roven součtu residuí v pólech, jejichž imaginární část je kladná,

$$\begin{aligned}
 Q(t, x, y, p_1, p_2, j) &= 2\pi i(R_1 + R_2 + r_5 R_5 + r_6 R_6) & t \geq 0 \\
 Q(t, x, y, p_1, p_2, j) &= -2\pi i(R_3 + R_4 + (1 - r_5)R_5 + (1 - r_6)R_6) & t < 0
 \end{aligned}$$

kde

$$r_5 = \begin{cases} 1 & \text{pokud } Im(z_5) \geq 0 \text{ a } t > 0 \\ 1 & \text{pokud } Re(p_1 + x) \leq 0 \text{ a } t = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad r_6 = \begin{cases} 1 & \text{pokud } Im(z_6) \geq 0 \text{ a } t > 0 \\ 1 & \text{pokud } Re(p_2 + y) \geq 0 \text{ a } t = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Jak se ukazuje při numerických výpočtech, pro příklad 2 s exponenciální modulací dává metoda spektrálních rozkladů podobné výsledky jako stochastická Newmarkova metoda a metoda spektrálních rozkladů. Vzhledem k tomu, že ABMA (viz příloha) jsou vlastně explicitní vzorec, je to spíše pochvala zmíněných numerických metod. Nabízí se možnost srovnání výsledků výpočtu odezvy mostku z příkladu 2 metodou zobecněnou stochastickou Newmarkovou a metodou spektrálních rozkladů. Výsledek srovnání je zobrazen na obr. 25, řešení vypočtené metodou spektrálních rozkladů je naznačeno plnou čarou a řešení Newmarkovo ( $\Delta t = 0.01$ ) čárkovaně.



Obrázek 25: Srovnání průběhu odezvy mostku na exponenciální buzení pro metodu spektrálních rozkladů a metodu Newmarkovu.

### 4.5.3 Po částech polynomiální (splajnová) modulace

Pro tento případ bude nutno vzít v úvahu složitější tvar modulace  $\mathbf{m}(t) = \sum_{q=0}^r \mu_q(t) \mathbf{m}_q$ . Zde  $\mathbf{m}_q$  budou (diagonální) matice určující „umístění“ funkce a  $\mu_q(t) = \sum_{l=0}^d \alpha_{qkl} (t - t_k)^l$ . Není třeba, aby matice  $\mathbf{m}_q$  tvořily výlučný rozklad jednotkové matice; v případě společné modulace pro celou soustavu budou všechny jednotkové. Index  $k$  označuje číslo intervalu dělení  $0 = t_0 < \dots < t_N$ ,  $l$  mocninu v polynomu a  $d$  stupeň splajnu. Spektrální hustotu

$\psi(\omega)$  spojitého AR(2) procesu buzení uvažujeme opět ve tvaru (107), stejně jako v minulém odstavci. Pro  $t \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$  definujeme  $\chi_{qk}(t, p, \omega)$  a  $\varphi_{qk}(t, p, \omega)$

$$\begin{aligned}\chi_{qk}(t, p, \omega) &= e^{pt} \int_0^{t-t_k} \sum_{l=0}^d \alpha_{qkl} \tau^l e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau = e^{pt} \sum_{l=0}^d \alpha_{qkl} J_l(t-t_k, p, \omega) \\ \varphi_{qk}(t, p, \omega) &= e^{pt} \int_0^{t-t_k} \sum_{l=1}^d l \alpha_{qkl} \tau^{l-1} e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau = e^{pt} \sum_{l=1}^d l \alpha_{qkl} J_{l-1}(t-t_k, p, \omega)\end{aligned}$$

kde

$$J_l(t, p, \omega) = \int_0^t \tau^l e^{-(p-i\omega)\tau} d\tau$$

Při výpočtu se uplatní rekursivní pravidlo:

$$\begin{aligned}J_{-1}(t, p, \omega) &= 0 \\ J_0(t, p, \omega) &= \frac{1}{-(p-i\omega)} \left( e^{-(p-i\omega)t} - 1 \right) \\ J_l(t, p, \omega) &= \frac{1}{-(p-i\omega)} \left( t^l e^{-(p-i\omega)t} - l J_{l-1}(t, p, \omega) \right) \text{ pro } l > 0\end{aligned}$$

Dále buďte funkce  $\chi_q$  a  $\phi_q$  takové, že

$$\chi_q(t, p, \omega) = e^{pt} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k < t}}^N \chi_{qk}(\min(t, t_{k+1}), p, \omega) \quad \varphi_q(t, p, \omega) = e^{pt} \sum_{\substack{k=0 \\ t_k < t}}^N \varphi_{qk}(\min(t, t_{k+1}), p, \omega)$$

Podobně jako v minulém odstavci budiž pomocná funkce  $Q_{l_1 l_2 j}(\vartheta_1, \vartheta_2, p_1, p_2)$  definována jako

$$Q_{l_1 l_2 j}(\vartheta_1, \vartheta_2, p_1, p_2) = \int_0^{\vartheta_1} \int_0^{\vartheta_2} \tau_1^{l_1} \tau_2^{l_2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^j \psi(\omega) e^{-(p_1-i\omega)\tau_1} e^{-(p_2+i\omega)\tau_2} d\omega}_{=R(\tau_1, \tau_2)} d\tau_2 d\tau_1 \quad (108)$$

Nejvnitřnější integrál  $R(\tau_1, \tau_2)$  (přes  $\omega$ ) je možno spočíst podle residuové věty: za předpokladu, že parametry spektrální hustoty (107) jsou takové, že  $a < b$  bude

$$\begin{aligned}R(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 \left( \frac{\left( i \left( b + \sqrt{b^2 - a^2} \right) \right)^j e^{(-b - \sqrt{b^2 - a^2} - p_1)\tau_1} e^{(b + \sqrt{b^2 - a^2} - p_2)\tau_2}}{a^2 - b \left( b + \sqrt{b^2 - a^2} \right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left( i \left( b - \sqrt{b^2 - a^2} \right) \right)^j e^{(-b + \sqrt{b^2 - a^2} - p_1)\tau_1} e^{(b - \sqrt{b^2 - a^2} - p_2)\tau_2}}{-a^2 + b \left( b - \sqrt{b^2 - a^2} \right)} \right)\end{aligned}$$

Vnější integrály přes  $\tau_1$  a  $\tau_2$  je rovněž možno spočíst analyticky, jejich vyjádření však pro rozsáhlost nebudeme uvádět. Pomocí výše definované funkce  $Q_{l_1, l_2, j}$  (108) lze napsat

poměrně jednoduchá vyjádření funkcí (103).

$$\begin{aligned}
f^{\varphi_q \varphi_r}(t_1, t_2, p_1, p_2) &= \epsilon \sum_{\substack{k_1=1 \\ t_{k_1} < t_1}} \sum_{\substack{k_2=1 \\ t_{k_2} < t_2}} \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=1}^d l_1 l_2 \alpha_{qk_1 l_1} \alpha_{rk_2 l_2} Q_{(l_1-1), (l_2-1), 0}(\Delta_1, \Delta_2, p_1, p_2) \\
f_j^{\varphi_q \chi_r}(t_1, t_2, p_1, p_2) &= \epsilon \sum_{\substack{k_1=1 \\ t_{k_1} < t_1}} \sum_{\substack{k_2=1 \\ t_{k_2} < t_2}} \sum_{l_1=1}^d \sum_{l_2=0}^d l_1 \alpha_{qk_1 l_1} \alpha_{rk_2 l_2} Q_{(l_1-1), l_2, j}(\Delta_1, \Delta_2, p_1, p_2) \quad j = 0, 1 \\
f_j^{\chi_q \chi_r}(t_1, t_2, p_1, p_2) &= \epsilon \sum_{\substack{k_1=1 \\ t_{k_1} < t_1}} \sum_{\substack{k_2=1 \\ t_{k_2} < t_2}} \sum_{l_1=0}^d \sum_{l_2=0}^d \alpha_{qk_1 l_1} \alpha_{rk_2 l_2} Q_{l_1, l_2, j}(\Delta_1, \Delta_2, p_1, p_2) \quad j = 0, 1, 2
\end{aligned} \tag{109}$$

kde  $\epsilon = e^{p_1 t_1 + p_2 t_2}$ ,  $\Delta_i = \min(t_i, t_{k_i+1}) - t_{k_i}$  pro  $i = 1, 2$ .

Nyní je vhodné uvést krátkou rekapitulaci. Východiskem pro případ splajnové modulace je rovnice (106). Za  $\Lambda_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^{s,q}$  se dosazují podle rovnice (105) výrazy (109). Velmi zjednodušeně a nepřesně je možno napsat pro matici  $\mathbf{K}_u(t_1, t_2)$  výraz

$$\sum_{e,f=1}^{2n} \sum_{s,q=1}^r \sum_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}} \mathbf{S}_e \mathbf{X} \mathbf{S}_{msq} \mathbf{Y}^T \mathbf{S}_f^H \sum_{\substack{k_1=1 \\ t_{k_1} < t_1}} \sum_{\substack{k_2=1 \\ t_{k_2} < t_2}} \sum_{l_1, l_2=0}^d \alpha_{qk_1 l_1} \alpha_{rk_2 l_2} Q_{l_1, l_2, j}(\Delta_1, \Delta_2, p_e, p_f) \tag{110}$$

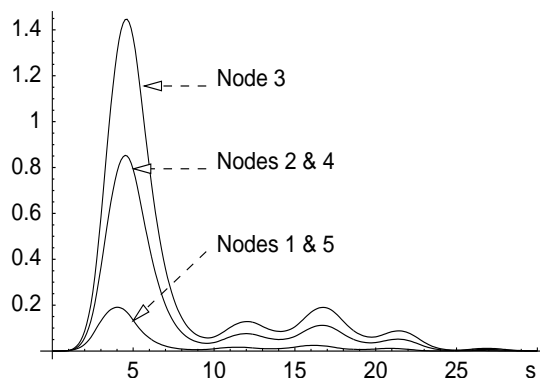
Výraz (110) ukazuje složitost celkového výpočtu. Pokud odhlédneme od pracnosti výpočtu matic  $\mathbf{S}_l$ , které vyžadují řešení úplného problému vlastních čísel, bude celkový počet vyčíslení funkce  $Q$  pro jednu dvojici  $(t_1, t_2)$  roven  $36n^2 r^2 (d+1)^2 n_{t_1} n_{t_2}$ , kde  $n_t: t_{n_t-1} < t \leq t_{n_t}$  (číslo úseku splajnu). Pro příklad 2, uváděný v průběhu této práce, a pro  $t_1$  a  $t_2$  ležící v pátém intervalu modulačního kvadratického splajnu, kde každá podpora má svůj vlastní splajn, se bude funkce  $Q$  vyčíslovat 810000 krát. Vhodným přeskupením sumací a vyloučením duplicit je jistě možno toto číslo snížit, nikoli však příliš razantně. Na rozdíl od případu exponenciální modulace zde totiž neplatí symetrie mezi indexy.

Složitost této metody není tolik závislá na dimenzi úlohy  $n$ , jak je tomu u korelační metody. Matice  $\mathbf{S}_l$  mají hodnotu 1, proto nemusí zabírat velikou paměť, matice označené  $\mathbf{X}\mathbf{m}_s \mathbf{S}_m \mathbf{m}_q^T \mathbf{Y}^T$  v rovnici (106) jsou zpravidla velmi řídké. Nicméně při jemnějším dělení modulačního splajnu může pracnost metody narůst nad únosnou mez. Rovněž algoritmizace metody je složitá a bez použití programu Mathematica<sup>TM</sup> (Wolfram, 1999) takřka nemyslitelná.

Nezanedbatelnou výhodou nicméně je, že metoda jednoduše umožní zjišťovat odezvu pro jednotlivé vlastní tvary konstrukce. V takovém případě je výpočet výrazně rychlejší než pro kompletní systém.

Aplikace metody pro buzení popsané evolučním spektrem či víceúrovňovým rozkladem by vyžadovala buď uplatnění předpokladu o zanedbatelné korelaci mezi jednotlivými složkami buzení, nebo jistý zásah do odvozených vzorců. Bylo by potřeba rozlišovat funkce  $\phi$  a  $\chi$  tak, aby umožnily zadání dvou sad parametrů spektrálních hustot. Nemělo by to být obtížné, ale opět to zvýší složitost celého problému.

I pro splajnovou modulaci vychází řešení metodou spektrálních rozkladů a ryze numerickými metodami (korelační s ARMA buzením či stochastickou Newmarkovou metodou) velmi podobně. Na obrázku 26 je vykreslen průběh odezvy mostku na splajnem modulované buzení, jak bylo užíváno v celé práci (viz obr. 16 na str. 41). Čárkovaně vykreslené řešení získané korelační metodou s ARMA buzením bohužel (či spíše bohudík) splývá s plnou čarou řešení metody spektrálních rozkladů, takže obrázek působí fádne. Shoda je zvláště důležitá s ohledem na fakt, že výpočet spektrálních rozkladů je velice strojově náročný, a to i v současných výpočetních podmínkách.



Obrázek 26: Časový průběh odezvy mostku (příklad 2) na skutečné zemětřesení (záznam Sierra Madre) vyjádřené splajnem, výpočet metodou spektrálních rozkladů

## 5 Závěr

Silná zemětřesení vždy byla a přes značné pokroky dnešní techniky stále zůstávají obrovskými katastrofami. Oběti na životech si vybírají zvláště v méně rozvinutých zemích, kde není možné realizovat stavby podle nejnovějších vědeckých poznatků. Relativní bezpečí seizmicky klidné České kotliny nás svádí zapomínat na hrůzné důsledky přírodních katastrof či špatně navržených konstrukcí, nicméně i u nás je třeba dodržovat předepsanou seismickou bezpečnost pro kritické stavby.

Tvorba stavebních norem je i ve světě v neustálém vývoji. Vždy se při tomto procesu střetávají návrhy seismických inženýrů, kteří požadují využití posledních poznatků, projektantů, kteří se bohužel často v problematice dostatečně neorientují, a investorů, kteří sice chtějí absolutně bezpečné stavby, ale za minimum peněz. Pokud vítězí spořivost investorů, může to vést k desítkám tisíc obětí jako při zemětřesení Kocaeli v Turecku, 17. 8. 1999, kdy zemřelo 16000 lidí. Bohužel, i sebesofistikovanější seismicky izolovaná stavba podlehne v případě, že k selhání dojde v zemině pod stavbou. Že však protiseismická ochrana staveb může být účinná, je možné ukázat jednoduše porovnáním například účinků podobně silných zemětřesení v Arménii r. 1988 (26000 obětí) a zemětřesení Loma Prieta (18. 10. 1988) v oblasti Los Angeles, zde zahynulo jen 61 lidí.

Teprve v poslední době je k dispozici poměrně značné množství seismických záznamů, umožňující statistické zpracování a dávající reálné podklady pro stochastické metody v mechanice. Přílišný optimismus však není na místě, neboť jednotlivé seismické události se vzájemně moc nepodobají. Přes značné úsilí, které vyvíjejí zejména seismologové spolupracující na tvorbě stavebních norem pro stavby seismicky namáhané (např. EUROCODE 8), je hledání jednoduchých parametrů kategorizujících zemětřesení stále otevřeným úkolem.

Hlavním těžištěm předkládané práce byly numerické metody určené k výpočtu náhodných charakteristik odezvy konstrukcí. Uvedené metody by však mohly najít uplatnění i ekonomice a jiných oborech.

Závěry práce je možno shrnout do několika bodů

1. Seizmogramy jsou značně nestacionární děje, je však možno je nahradit součtem modulovaných stacionárních procesů. Jejich nestacionarita nespočívá jen v proměnné amplitudě v čase, ale i v proměnných frekvenčních charakteristikách. Ukazuje se nicméně, že hlavní nápor zemětřesení bývá frekvenčně poměrně kompaktní a složky odpovídající jiným (vyšším) výřezům spektra mívají řadově menší amplitudy. Jejich vliv na soustavu je pak více méně zanedbatelný. Na zkoumaných záznamech se rovněž ukazuje, že v okamžicích maximální aktivity je proces poměrně dobře gaussovský (jinak tomu už bývá při doznívání).
2. Otázka optimální volby tvaru modulační funkce zůstane vždy na uživateli a požadavcích jeho aplikace. Jakkoli tato práce upřednostňovala nejobecnější splajnovou modulaci, je možné ji například použít pouze k určení stacionarizované části a následně její spektrální hustoty a k vlastnímu výpočtu chování soustavy je pak možno použít metodu s jinou, výpočetně jednodušší modulací (např. dvojitou exponenciálu). Je však třeba poukázat na nebezpečí jednoduchých rozkladů (tj. rozkladů výhradně v časové oblasti), které vyrovnáním amplitud jinak slabých částí záznamu zkreslují spektrální hustotu částí (nej)silnějších.
3. Všechny uváděné výpočetní metody jsou použitelné, jakkoli každá pro trochu jiný účel:
  - (a) Pro rychlý odhad rozptylu odezvy soustavy je vhodná základní forma korelační metody. Pro skutečně hrubé, leč přesto názorné vyjádření základních charak-

teristik odezvy dobře poslouží sama matice  $\mathbf{D}_s$  popisující chování soustavy při stacionárním buzení (Heavisideova modulace, rovnice (80)).

- (b) Pro získání přesné hodnoty rozptylu odezvy soustavy v několika málo okamžicích je vhodná metoda spektrálních rozkladů. Je dost dobře možné obě metody kombinovat, když spojíme výpočet maticové exponenciály pro korelační metodu s řešením úplného problému vlastních čísel pro metodu spektrálních rozkladů.
  - (c) Metoda spektrálních rozkladů může být úspěšně použita i pro neúplný systém vlastních vektorů.
  - (d) Stochastická Newmarkova metoda i korelační metoda s ARMA buzením jsou numerické metody s výhodami i nevýhodami z toho plynoucími. Jsou poměrně rychlé ale mírně citlivé na časový krok  $\Delta t$ . Z důvodů veskrze osobních dává autor přednost té později jmenované, nicméně výsledky obou jsou velmi podobné.
  - (e) Pro víceúrovňové buzení (buzení zadané evolučním spektrem) je možno použít buďto korelační metodu, nebo – za předpokladu zanedbatelné vzájemné korelace jednotlivých složek rozkladu – i metody ostatní, nicméně interpretaci výsledků je třeba přikládat obzvláštní pozornost.
4. Všechny tyto metody jsou deterministické, využívají deterministické postupy k popisu stochastických jevů. Z toho pramení jak jejich síla, tak i slabost. Síla proto, že pomáhají odstraňovat nejistotu náhodnosti ze zkoumaných úloh. Slabost v tom, že vstupní data pro výpočet vznikají odhadem či pozorováním náhodného jevu a jsou proto značně nejistá. Poměrně snadno se může stát, že chybný odhad spektrální hustoty vstupního procesu zcela znehodnotí výpočet. Při interpretaci výsledků je proto vždy na místě maximální opatrnost.
5. Vývoji stochastických metod je věnováno poměrně velké úsilí, jak se dá soudit z počtu článků s podobnou tematikou v odborných časopisech. Zdá se však, že je zanedbáváno úsilí o dostatečně věrný popis zemětřesení jakožto náhodného procesu. Je možné, že bude nutno používat vyšší řády ARMA modelů či jiné, obecnější tvary spekter. Nutno přiznat, že i přes určitý přínos předkládané práce, která byla původně zaměřena výhradně na numerickou stránku problému, zůstává v této oblasti mnoho otázek nedořešených.

Je poctivé připomenout, že zmíněné metody se omezují na poměrně úzký okruh problémů — na lineární diferenciální rovnice, modulované gaussovské buzení o známé spektrální hustotě. Již dnes se objevují práce, snažící se zmírnit či odstranit některé z uvedených omezujících předpokladů. Za všechny uveďme například práci (Conte and Peng, 1997), užívající evolučního spektra k popisu zemětřesení či práce (Zhang et al., 1999; To, 1986, 1992), které rozšiřují stochastickou Newmarkovu metodu na (mírně) nelineární úlohy. Kromě teoretických problémů zůstávají i některé praktické otázky, jako například použitelnost metod pro opravdu rozsáhlé soustavy či efektivní formulace (naprogramování) metody spektrálních rozkladů.

Zemětřesení v obydlených oblastech napáchá vždy obrovské škody. Předcházet zemětřesením se lidstvo zřejmě hned tak nenaučí, předpovídání zemětřesení je stále nejisté. Jediná současná obrana je pasivní: spočívá ve stavbě odolných budov a právě k tomu chtěla přispět i předkládaná práce.

## Reference

- Amin, M., and Ang, A. H.-S.: *Nonstationary Stochastic Model of Earthquake Motions*, Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, Vol. 94, No. EM2, Proc. Paper 5906, April, 1968, pp. 559-583.
- Anděl, Jiří: *Statistická analýza časových řad*. SNTL, 1976
- ANSYS® Theory Reference 001099. 9<sup>th</sup> edition, SAS IP, Inc.
- Barstein, M.F.: *Vozdějstviže větra na vysokie sooruzhenija*. Stroitel'naja mehanika i rasčot sooruzhenij. 1, 1959
- Barstein, M. F.: *Application of Probability Methods for Design: The Effect of Seismic Forces on Engineering Structures*. Proceedings 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, 1960.
- Battaglia, F.: *Some extensions in the evolutionary spectral analysis of a stochastic process*. Bolletino della Unione Matematica Italiana, 16B(5), 1979, pp. 1154-1166.
- Beck, J.L., Dowling, M.J.: *Quick Algorithms for Computing Either Displacement, Velocity or Acceleration of an Oscillator*. Earthq. eng. and struct. dyn., vol. 16, 245-253
- Bendat, J.S.: *Principles and Applications of Random Noise Theory*. Wiley, New York, 1958
- Bogandoff, J. L., Goldberg, J. E., and Bernard, M. C.: *Response of a simple Structure to a random Earthquake-Type Disturbance*. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 51, No. 2, April, 1961, pp. 293-310
- Bolotin, V. V., *Statistical Theory of the Aseismic Design of Structures*. Proceedings 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, 1960.
- Bolotin, V.V.: *Statističeskie metody v mehanike inženěrných sooruzhenij*. Gosstrojizdat, Moskva, 1961.
- de Boor, C.: *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- Boore, D. M.: *Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra*. Bull. Seism. soc. of America, Vol. 73, 6:1865-1894, Dec. 1983
- Bycroft, G. N.: *White noise representation of earthquakes*. J. Eng. Mech. Div, ASCE, 86(2), 1960, pp. 1-16.
- CALFEM, *A finite element toolbox to MATLAB, v. 3.2*. Division of Structural Mechanics and the Department of Solid Mechanics at Lund University, Sweden.
- Caughey, T.K.: *Existence and stability of ultraharmonics and subharmonics in forced non-linear vibrations*. Journ. Appl. Mech., 12, 1954, pp. 327-335
- Caughey, T.K., Hudson, D.E.: *A response spectrum analyser for transient loading studies*. S.E.S.A, vol. XIII, 1, 1955, pp.199-206
- Caughey, T. K., and Stumpf, H. J.: *Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation*. Journal of Applied Mechanics. Transactions ASME, Vol. 28, No. 4, Dec., 1961, pp. 563-566.
- Clough, R.W., Penzien, J.: *Dynamics of structures*. McGraw-Hill Inc., 2-nd edition, 1993
- Conte, J. P, and Peng. B: *Fully nonstationary analytical earthquake ground motion model*. J. Engrg. Mech., ASCE, 123(1), 1997, pp. 15-24.
- Daubechies, I.: *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992
- Davenport, A.G.: *The response of slender, line-like structures to a gusty wind*. Proc. Inst. Civ. Engrs. ASCE, 23,1962,pp. 449-472
- Doob, J. L.: *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1953
- Sidje, R. B.: *Expokit: A software package for computing matrix exponentials*. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 24, No. 1, March 1998, pp. 130-156  
<http://www.maths.uq.edu.au/expokit>
- Fischer, C.: *O simulaci (účinků) zemětřesení*. Sborník semináře PANM9, Kořenov 8.6.-12.6.1998. MÚ AV ČR, Praha 1998, str. 51-58
- Fischer, C.: *Decomposition of the seismic excitation*. Structural Dynamics – EURO DYN'99,



- Fryba & Náprstek (eds), 1999 Balkema, Rotterdam
- Gichman, I. I., Skorochood, A. V.: *Teorie náhodných procesů* (rusky), Nauka, Moskva 1971
- Gohberg, I., Lancaster, P., Rodman, L.: *Matrix Polynomials*. Academic Press, New York, 1982
- Goldberg, J. E., Bogdanoff, J. L., and Sharpe, D. R.: *The Response of Simple Non-Linear Systems to a Random Disturbance of the Earthquake Type*. Bulletin, Seismological Society of America, Vol. 54, No. I, Feb., 1964, pp. 263-276.
- Goodman, L. E., Rosenblueth, E., and Newmark, N. M.: *Aseismic Design of Firmly Founded Elastic Structures*. Transactions ASCE, Vol. 120, 1955, pp. 782-802
- Housner, G. W. : *Characteristics of strong-motion earthquakes*. Bull. Seismological Soc. of Am., 37(1), 1947, pp. 19-31.
- Housner, G. W.: *Properties of Strong Ground Motion Earthquakes*. Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 45, No 3, July, 1955, pp. 197-218
- Housner, G. W.: *Behavior of Structures During Earthquakes*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 85, No. EM4, Proc. Paper 2220, October, 1959, pp. 109-122.
- Housner, G. W., and Jennings, P C.: *Generation of artificial earthquakes*. J. Engrg. Mech. Div., ASCE, 90(1), 1964, pp. 113-150.
- Iyengar, R. N., and Iyengar, K. T.: *A Nonstationary Random Process Model for Earthquake Accelerations*. Bulletin, Seismological Society of America, Vol. 59, No. 3, June, 1969, pp. 1163-1188.
- Kameda, H.: *Evolutionary spectra of seismogram by multifilter*. J. Engrg. Mech. Div, ASCE, 101(6), 1975, pp. 787-801.
- Kanai, K.: *Semi-empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground Motion*. Bulletin of the Earthquake Research institute, Univ. of Tokyo, Japan, Vol. 35, June 1957, pp. 309-325
- Kujawski, J., Desai, C. S.: *An exact numerical time integration of scalar equations for undamped structural systems*. Earthquake eng. struct. dyn, 12, 1984, pp. 137-142
- Levy, R., Kozin, F, and Moorman, R. B. B.: *Random processes for earthquake simulation*. J. Engrg. Mech. Div, ASCE, 97(2), 1971, pp. 495- 517.
- Lin, Y.K.: *Probabilistic Theory of Structural Dynamics - Advanced Theory and Applications*. McGraw - Hill, New York, 1995
- Liu, S. C.: *Statistical Analysis and Stochastic Simulation of Ground Motion Data*. The Bell System Technical Journal, Dec., 1968, pp. 2273-2298.
- Liu, S. C.: *Evolutionary Power Spectral Density of Strong Motion Earthquakes*. Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 60, No. 3, June, 1970, pp. 891-900
- Lutes, L.D., Hu, S.-L. J. : *Non-Normal Stochastic Response of Linear Systems*. Journ. of Eng. Mech. ASCE, Vol. 112, No. 2, 1986, pp. 127-141
- Malat, S.: *Multiresolution approximation and wavelets*. Trans. Amer. Math. Soc., 315, 1989, pp. 69-88
- Náprstek J., Fischer C.: *Determination of stochastic characteristics of seismic nonstationary random excitation processes*. In: Seismic Design Practise into the Next Century, Balkema 1998, pp. 237-244
- Náprstek, J., Fischer O.: *A Combined Analytical-Numerical Method of Solving the Non-Stationary Random Response of Large Systems excited by Seismic Movement*. In: Proc. 6th International Conference - Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Wessex I. T., Bath. 1993
- Náprstek, J., Fischer O.: *Transient and macrostationary effects in the response of large systems under non-stationary random excitations*. In: Proc. 10th Eur. Conf. Earthq. Eng. (R. Flesch edt.). Vienna, 1994, Balkema, Rotterdam, 1995, pp.1241-1246.
- Náprstek, J., Fischer O.: *Correlation analysis of non-stationary vibrations of a large system*

- excited by seismic process*. Proc. 7th Int. Conf. Soil Dynamics and Earthquake Engineering '95, (C.A.Brebbia, A.S.Cakmak eds). Wessex Inst. of Techn., Chania (Greece), Comp.Mech.Publ., Southampton-Boston, 1995, pp.607–614.
- Náprstek, J.: *Stochastická mechanika soustav s multiplikativními a aditivními poruchami*. Disertační práce, UTAM AV ČR, 1996, Praha.
- Newmark, N.M.: *A Method of Computation for Structural Dynamics*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 85, 1959, pp. 67–94
- Nigam, C. C., Jennings, P. C.: *Calculation of Response Spectra from Strong-motion earthquake records*. Bull. of the seism. Soc. of America, Vol. 59, No. 2, 1969, pp. 909–922.
- Novák, M., Fischer O.: *On the lift forces on a cylinder vibrating in air flow*. Acta technica ČSAV, 6, 1966
- Mizerová, J.: *Autoregresní modely se spojitým časem*. Diplomová práce, MFF UK, 2000, Praha.
- Pandit, S.M., Wu, S. M.: *Unique estimates of the parameters of a continuous stationary stochastic process*. Biometrika, 62, 2, 1975, pp. 497-501
- Parzen, E.: *Mathematical consideration in the estimation of spectra*. Technometrics, 3, 1961, pp. 167–190.
- Phadke, M.S., Wu, S.M.: *Modelling of Continuous Stochastic Processes from Discrete Observations with Application to Sunspot Data*. Journ. of the Am. Statist. Assoc., No. 346, Vol. 69, June 1974, pp. 325-329
- Penzien, J.: *Applications of Random Vibration Theory in Earthquake Engineering*. Bulletin of the International Institute of Seismology, Vol. 2, 1965, pp. 47-69.
- Priestley, M. B.: *Evolutionary spectra and nonstationary processes*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 27, 1965, pp. 204-237
- Priestley, M. B.: *Spectral Analysis and Time Series*. Vol. 1, Acad. Press, 1981
- Priestley, M. B.: *Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis*. Acad. Press, 1988
- Pugačev, V. S, Sincyn, I. N.: *Stochastičeskije diferencialnyje sistemy*. 2nd ed, Nauka, Moskva, 1990
- Rascon, O. A., and Cornell, C. A.: *Strong Motion Earthquake Simulation*. Research Report R68-15, School of Engineering, MIT, Cambridge, Mass., April, 1968.
- Robson, J.D.: *An Introduction to Random Vibration*. Elsevier, Amsterdam, 1964
- Rosenblueth, E.: *Some Applications of Probability Theory in Aseismic Design*. World Conference on Earthquake Engineering, Bekley, Calif., June 1956
- Rosenblueth, E., and Bustamante, J. E.: *Distribution of Structural response to Earthquakes*. Journal of the Engineering Mechanics Division, AASCE, Vol. 88, No. EM3, Proc. Paper 3177, June 1962, pp.75–706
- Saragoni R., Hart G.: *Simulation of artificial earthquakes*. Earthquake Eng. and Struct. Dyn. Vol. 2, 1974, pp. 249-267
- Shinozuka, M., Jan, C.-M.: *Digital Simulation of Random Process and Its Applications*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 25, No. 1, 1972
- Shinozuka, M., Sato, Y.: *Simulation of Nonstationary Processes*. Jour. Eng. Mechanics Division, ASCE, 1, 1967, pp. 11–40
- Tajima, H.: *A Statistical Method of Determining The Maximum Response of a Building Structure During Earthquake*. Proc. of the Second World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo and Kyoto, Japan, Vol. II, July 1960
- To, C. W. S., 1986, *The stochastic central difference method in structural dynamics*. Computers and Structures 23, pp. 813–818
- To, C. W. S., 1992, *A stochastic version of the Newmark family of algorithms for discretized dynamic systems*. Computers and Structures 44, pp. 667–673
- Uvi\_Wave version 3.0, WAVELET TOOLBOX for MATLAB<sup>®</sup>, Copyright 1996, by Universidad de Vigo under GNU conditions,  
[http://www.tsc.uvigo.es/~wavelets/uvi\\_wave.html](http://www.tsc.uvigo.es/~wavelets/uvi_wave.html)

- Veletsos, A. S., Ventura, C. E.: *Analysis of dynamic response of linear systems*. Earthquake eng. struct. dyn, 12, 1984, pp. 521–536.
- Ward, H. S., *Analog Simulation of Earthquake Motions*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 91, No. EMS, Proc. Paper 4522, October, 1965, pp. 173-190.
- Wilkinson, J. H. : *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965
- Wolfram, St.: *The Mathematica Book, 4th ed.* Wolfram Media – Cambridge University Press, 1999
- Zembaty, Z. and Krenk, S.: *Response spectra of spatial ground motion*. In: Proc. 10th Eur. Conf. Earthquake Engineering (R. Flesch ed.), TU Vienna, Vienna (Austria), 1994, Balkema, Rotterdam, 1995, pp. 1271-1275.
- Zhang, L., Zu, J. W., Zheng, Z.: *The stochastic Newmark algorithm for random analysis of multi-degree-of-freedom nonlinear systems*, Computers and structures, 70 (1999), pp. 557–568
- Zhang, S. W., Zhao, H. H.: *Effects of time step in stochastic central difference method*. Journal of Sound and Vibration, 1992, 159 (1), pp. 182-188
- Zienkiewicz, O.C.: *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Company, London, 1977

## Příloha A

V první příloze budou popsány příklady použité pro testování jednotlivých numerických metod

### Příklad 1.

Jako první příklad vezměme jednoduchý tlumený oscilátor buzený pohybem (a rychlostí) podloží, reprezentovaný jednou lineární diferenciální rovnicí druhého stupně (odpovídající soustavě (50))

$$\ddot{u}(t) + \alpha_1 \dot{u}(t) + \alpha_0 u(t) = \beta_0 v(t) + \beta_1 \dot{v}(t) \quad (\text{A.1})$$

přičemž buzení  $v(t)$  uvažujeme jako spojitý stacionární AR(2) model

$$\ddot{v}(t) + \beta_1 \dot{v}(t) + \beta_0 v(t) = w(t) \quad (\text{A.2})$$

kde  $w(t)$  je spojitý bílý šum o jednotkové intenzitě. Protože v tomto případě uvažujeme stacionární buzení, je možné najít výslednou disperzi odezvy přesně:

Rovnice (A.1-A.2) můžeme převést na soustavu čtyř rovnic prvního řádu

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}' \\ \dot{v} \\ \dot{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \beta_0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta_0 & -\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \\ v \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$$

Pomocí Fourierovy transformace přenosové funkce můžeme vypočítat spektrální hustotu řešení  $u(t)$  (analogie rovnice (23)):

$$\psi_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\beta_0^2 + \omega^2 \beta_1^2}{((\omega^2 - \alpha_0)^2 + \omega^2 \alpha_1^2) ((\omega^2 - \beta_0)^2 + \omega^2 \beta_1^2)}$$

Ve výpočtech používáme jako konkrétní hodnoty brát  $\alpha_1 = 1,99$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_1 = 18,72$  a  $\beta_0 = 243,36$ . Rozptyl výsledného procesu (spočtený například jako integrál  $\int_{\mathbb{R}} \psi_u(\omega) d\omega$  pomocí residuové věty) je pro naše vstupní data roven 0.253115. Při provádění simulačního výpočtu numerickým řešením soustavy rovnic (A.1-A.2), kde za vstup  $w(t)$  dosadíme gaussovský náhodný proces s nulovým středem a variancí  $\sigma_w^2 = 1/\Delta t$ , bývá variance výsledku okolo 0.25. Tento příklad je užíván pro kontrolu funkčnosti metod pro skokovou modulaci a pro speciální (umělou) splajnovou modulaci.

Pro metody používající jako náhodné buzení diskretní AR(2) model byly namísto koeficientů spojitého modelu AR(2)  $\beta_0$  a  $\beta_1$  používány koeficienty z tabulky

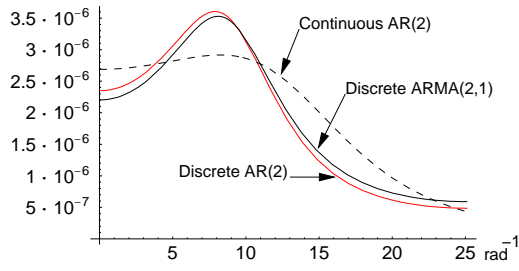
	$\Delta t$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$\sigma_w$	$\sigma_\eta^2$
AR(2)	0.125	-0.4783	0.2765		0.00307	$0.9474 \times 10^{-4}$
	0.01	-1.8042	0.8266		$9.22 \times 10^{-5}$	$1.1025 \times 10^{-4}$
ARMA(2, 1)	0.125	-0.473	0.270	-0.0618	0.00316	$0.95993 \times 10^{-4}$
	0.01	-1.8042	0.8266	$-2.83 \times 10^{-7}$	$9.22 \times 10^{-5}$	$1.1025 \times 10^{-4}$

Tabulka 7: koeficienty diskretního ARMA modelu pro příklad 1

Pro časový krok  $\Delta t = 0.125$  není aproximace spektrální hustoty příliš dobrá, jak ukazuje obrázek 27. Nicméně hodnoty výsledného rozptylu  $\sigma_w^2$  nejsou tak špatné, přesná hodnota je

$$\sigma_x^2 = \frac{I_0}{2\alpha_0\alpha_1} = 1.09754 \times 10^{-4}$$

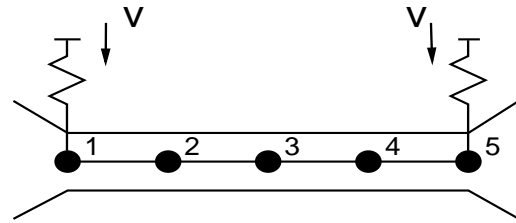
Aproximace spojitého procesu pro časový krok  $\Delta t = 0.01$  je výrazně lepší, na případném obrázku by obě křivky splývaly.



Obrázek 27: Aproximace diskretním ARMA procesem pro  $\Delta t = 0.125$

## Příklad 2

Jako druhý příklad poslouží výpočet horizontální odezvy jednoduchého mostku modelovaného jako symetrický nosník s pěti koncentrovanými hmotami na dvou pružných podporách v koncových bodech, viz obr. 28. Vlastní frekvence konstrukce jsou  $6.4, 24.9, 37.3, 41.0, 63.4 \text{ rad}^{-1}$ .



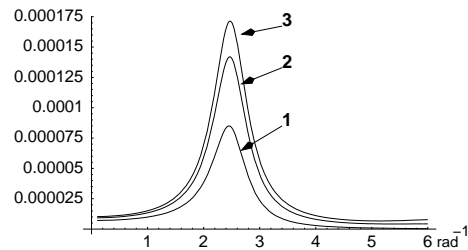
Obrázek 28: Nákres mostku pro příklad 2

Seismické buzení se do konstrukce vnaší přes podpory s tuhostí  $K_{\text{sup}} = 1.77 \times 10^9 \text{ N/m}$  a útlumem  $B_{\text{sup}} = 0.98 \times 10^7 \text{ Ns/m}$ , tyto hodnoty se objeví v maticích  $\mathbf{G}$  a  $\mathbf{F}$  rovnice (50). Matice hmotnosti v (50) je diagonální, prvky její diagonály jsou koncentrované hmotnosti ideálních uzlů 1-5 (viz obr. 28),  $M_1 \dots M_5 = \{1.24, 1.15, 0.9, 1.15, 1.25\} \times 10^6 \text{ kg}$ . Matice  $\mathbf{B}$  je diagonální rovněž, s čísly  $\{147.0, 28.5, 5.9, 28.5, 147.0\} \times 10^5 \text{ Ns/m}$  na diagonále. Členy symetrické matice  $\mathbf{C}$  jsou rovny koeficientům tuhosti  $c_{ij} = C_{ij}^{el}$  nosníku, jen v koncových bodech se přidává tuhost podpor  $c_{11} = c_{55} = C_{11}^{el} + K_{\text{sup}}$ . Tak nakonec dostáváme matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 200 & -52 & 36.7 & -9.17 & 1.53 \\ & 141 & 135 & 55 & -9.17 \\ & & 195 & 135 & 36.7 \\ \text{sym} & & & 141 & -52 \\ & & & & 200 \end{pmatrix} \times 10^7 \text{ Nm}^{-1}$$

V textu se s tímto příkladem používá AR(2) spektrální hustota o parametrech (obrázek 31)

$$\alpha_1 = 0.74, \quad \alpha_0 = 6.28, \quad I_0 = 0.0017334 \quad (\text{A.3})$$



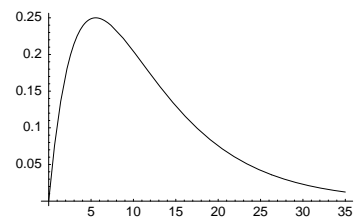
Obrázek 29: Spektrální hustota odezvy mostku na stacionární buzení o spektrální hustotě (A.3). Číslo u křivek odpovídá číslům uzlů na obr. 28

nebo spektrální hustota vypočtená ze stacionarizované části opraveného záznamu horizontálního posunu zemětřesení Sierra Madre, 28. června 1991 ze stanice Altadena, Eaton Canyon Park, směr východ-západ. V tom případě má použitá AR(2) spektrální hustota hodnoty (viz obrázek 32)

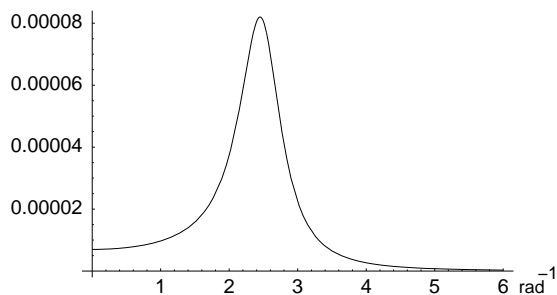
$$\alpha_1 = 3.18571, \quad \alpha_0 = 29.0536, \quad I_0 = 268.253 \quad (\text{A.4})$$

pro spektrální hustotu (A.3)				
$\Delta t$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$\sigma_w$
0.125	-1.7598	0.8493	$-1.5156 \cdot 10^{-5}$	0.0009
0.01	-1.99156	0.9922	$-1.61 \cdot 10^{-10}$	$4.32 \cdot 10^{-6}$
pro spektrální hustotu (A.4)				
0.01	-1.9658	0.96864	$-2.6 \cdot 10^{-8}$	0.001611

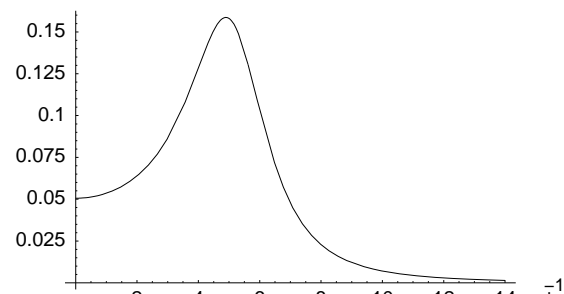
Tabulka 8: Koeficienty diskretního ARMA modelu pro příklad 2



Obrázek 30: Dvojitě exponenciální modulační funkce



Obrázek 31: Sp. hustota (A.3) (umělý případ)



Obrázek 32: Sp. hustota skutečného zemětřesení

V případě použití jednotkové skokové modulace buzení o spektrální hustotě (A.3) v obou krajních podpěrách, bude (asymptotický) rozptyl stacionárního řešení v bodech 1, 2 a 3 roven po řadě 0.000193146, 0.000337111, 0.000419181. Rozptyl v bodech 4 a 5 je v případě symetrického buzení stejný jako v bodech 2 a 1. Uvedené hodnoty byly získány numerickou integrací explicitní spektrální hustoty řešení (obrázek 29) a jsou na 3–4 platné číslice rovny diagonálním hodnotám matice  $\mathbf{D}_s$  z rovnice (81), udávající asymptotické stacionární řešení pomocí korelační metody.

Jako další modulační funkce je pro tento příklad používána dvojitá exponenciála (obrázek 30)

$$e^{-0.125t} - e^{-0.25t} \quad (\text{A.5})$$

a splajnová aproximace zmíněného záznamu zemětřesení Sierra Madre.

## Příloha B

### MOTIVACE.

Při řešení odezvy konstrukcí působené nestacionárním náhodným buzením, jak je uvedeno při popisu metody spektrálních rozkladů nebo například v (Náprstek and Fischer, 1993), se objevuje rovnice

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}(\omega, t) + \mathbf{C}\mathbf{U}(\omega, t) = \mathbf{f}(\omega, t) \quad (\text{B.1})$$

kde  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  jsou reálné symetrické matice,  $\mathbf{U}(\omega, t)$  deterministická funkce popisující transformaci náhodného buzení a  $\mathbf{F}$  je vhodná pravá strana. Užitím Laplaceovy transformace je možno přepsat problém do tvaru

$$(\mathbf{A}p^2 + \mathbf{B}p + \mathbf{C})\mathbf{U}^*(\omega, p) = \mathbf{Q}(p)\mathbf{U}^*(\omega, p) = \mathbf{F}^*(\omega, p)$$

a řešit

$$\mathbf{U}^*(\omega, p) = \mathbf{Q}(p)^{-1}\mathbf{f}^*(\omega, p)$$

Jak je ukázáno v (Gohberg et al., 1982), inverze polynomu  $\mathbf{Q}(p)^{-1}$  je možná psát ve tvaru sumy

$$\mathbf{Q}(p)^{-1} = \sum_{j=1}^n \left( \mathbf{S}_j \frac{1}{p - p_j} + \bar{\mathbf{S}}_j \frac{1}{p - \bar{p}_j} \right) \quad (\text{B.2})$$

kde  $p_j$  jsou kořeny  $\det \mathbf{Q}(p)$  a matice  $\mathbf{S}_l$  je možno výhodně počítat jako

$$\mathbf{S}_j = \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^\top \quad (\text{B.3})$$

kde  $\mathbf{x}_j$  jsou vlastní vektory polynomu  $\mathbf{Q}(p)$  splňující podmínky (B.12). Řešení (B.1) se potom dá psát ve tvaru

$$\mathbf{U}(\omega, t) = \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{S}_j \int_0^t e^{p_j(t-\tau)} \mathbf{f}(\omega, \tau) d\tau \quad (\text{B.4})$$

### ZÁKLADNÍ POJMY

Značení a základní pojmy uvádíme podle (Gohberg et al., 1982). Lemma, umožňující formulovat výpočetně vhodný tvar, je původní.

**Definice.** Budiž  $\mathbf{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^l \mathbf{A}_j \lambda^j$  maticový polynom, kde  $\mathbf{A}_j$  jsou čtvercové matice řádu  $n$ . Vlastním číslem  $\lambda$  maticového polynomu budeme rozumět kořen  $\det \mathbf{L}(\lambda)$ . Odpovídajícím (pravým) vlastním vektorem maticového polynomu bude každé netriviální řešení rovnice

$$\mathbf{L}(\lambda)\mathbf{x} = \sum_{j=0}^l \mathbf{A}_j \lambda^j \mathbf{x} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Linearizace maticového polynomu je způsob, jak převést nelineární problém na standardní výpočet klasických (lineárních) vlastních čísel. Nejprve zavedeme ekvivalenci maticových polynomů:

**Definice** Dva maticové polynomy  $\mathbf{M}(\lambda), \mathbf{N}(\lambda)$  jsou spolu ekvivalentní ( $\mathbf{M}(\lambda) \simeq \mathbf{N}(\lambda)$ ), jestliže existují maticové polynomy  $\mathbf{E}(\lambda), \mathbf{F}(\lambda)$  s nenulovým konstantním determinantem takové, že

$$\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{E}(\lambda)\mathbf{N}(\lambda)\mathbf{F}(\lambda)$$

Jak je přímo z předpokladů vidět, determinanty polynomů  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  se liší jen násobnou konstantou, takže oba mají stejné kořeny. (Determinant součinu je součin determinantů.)

**Definice** Linearizací *maticového polynomu*  $\mathbf{L}(\lambda)$  rozumíme lineární maticový polynom  $\mathcal{L}(\lambda) = \mathbf{I}\lambda - \mathcal{A}$  dimenze  $ln$  ekvivalentní polynomu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{p \times p} \end{pmatrix}$$

kde symbolem  $\mathbf{I}_{p \times p}$  rozumíme jednotkovou matici dimenze  $p = (l-1)n$ . Někdy se linearizací nazývá též sama linearizační matice  $\mathcal{A}$ .

Linearizace maticového polynomu není jednoznačná, avšak zcela zřejmě platí, že jsou-li  $(\mathbf{I}\lambda - \mathcal{A})$  a  $(\mathbf{I}\lambda - \mathcal{B})$  dvě linearizace téhož polynomu, budou matice  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  sobě podobné.

Linearizační maticí polynomu  $\mathbf{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^l \mathbf{A}_j \lambda^j$  je například matice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{I} \\ \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_{l-1} \end{pmatrix} \quad \text{kde } \mathbf{B}_i = -\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{A}_i, \quad i = 0, \dots, l-1$$

Pro svou jednoduchost se takováto linearizace hodí k výpočtu vlastních čísel i vektorů.

**Definice** Jordanův řetězec odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_0$  maticového polynomu  $\mathbf{L}(\lambda)$  budou řešení  $\mathbf{x}_i$  rovnice

$$\sum_{p=0}^i \frac{1}{p!} \mathbf{L}^{(p)}(\lambda_0) \mathbf{x}_{i-p} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

Symbolem  $L^{(p)}$  rozumíme derivaci.

Poznámka: Pro polynom nemusí být  $\mathbf{x}_i$  lineárně nezávislé.

Blokový zápis. Budiž  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k]$  matice, jejíž sloupce jsou vektory Jordanova řetězce odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_0$ , označme  $\mathbf{J}_k$  odpovídající Jordanovu buňku, pak

$$\sum_{j=0}^k \mathbf{A}_j \mathbf{X} \mathbf{J}_k^j = 0 \quad \mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

**Definice.** Standardní dvojice maticového polynomu bude taková dvojice matic  $(\mathbf{X}, \mathbf{T})$ , že matice dimenze  $(nl \times nl)$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}\mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_l \mathbf{X} \mathbf{T}^{l-1} \end{pmatrix}$$

bude regulární a

$$\sum_0^l \mathbf{A}_j \mathbf{X} \mathbf{T}^j = 0$$

Dvojice nejsou definicí určeny jednoznačně, ovšem jestliže  $\mathbf{T}$  má Jordanův tvar, pak k ní již bude existovat jediná matice  $\mathbf{X}$ : její sloupce jsou vektory odpovídajících Jordanových řetězců. Posledně zmíněná dvojice  $(\mathbf{X}, \mathbf{T})$  se nazývá *Jordanova dvojice*.

Bude-li  $\mathbf{T}$  diagonální, budou sloupce  $\mathbf{X}$  přímo (pravé) vlastní vektory, tj. řešení (B.5). Pro linearizační matici  $\mathcal{A}$  pak platí

$$\mathcal{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{T}$$



Tento problém je možno řešit použitím standardních metod (procedur) lineární algebry pro hledání vlastních čísel. Někdy je výhodné využít speciální tvar linearizační matice a odvodit vlastní formulaci některé ze standardních metod. Jednoduše to jde např. u mocninné metody (Wilkinson, 1965):

Budiž  $l = 2$ ,  $\lambda$  a  $\mathbf{u}_0$  buďte aproximace hledaného vlastního čísla a vektoru,  $\mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{u}_0$ . Zobecněné iterační pravidlo pak praví:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_2 \lambda^2 + \mathbf{A}_1 \lambda + \mathbf{A}_0) \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_2 \lambda \mathbf{y}_k \\ \lambda \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

**Definice** Jordanovou trojicí se nazývá trojice  $(\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{Y})$ , kde  $(\mathbf{X}, \mathbf{T})$  je Jordanova dvojice a pro  $\mathbf{Y}$  platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{T}^j \mathbf{Y} &= \mathbf{0} \quad i = 0, \dots, l-1 \\ \mathbf{A}_l \mathbf{X} \mathbf{T}^{l-1} \mathbf{Y} &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

**Lemma** Jsou-li vlastní čísla problému nenulová a matice  $\mathbf{A}_l$  je regulární, řádky matice  $\mathbf{Y}$  tvoří levé vlastní vektory polynomu  $\mathbf{L}(\lambda)$ ,

$$\sum_{j=0}^k \mathbf{T}^j \mathbf{Y} \mathbf{A}_j = 0 \quad (\text{B.7})$$

Důkaz: Budiž  $l = 2$ . Východiskem důkazu je linearizace

$$\left[ - \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \right]$$

Je-li  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix}$  v Jordanově tvaru a  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X} \mathbf{T} \end{pmatrix}$ , bude platit

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{T} \quad (\text{B.8})$$

Přenásobením maticemi  $\mathbf{Q}^{-1}$  vyjde

$$\mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1}$$

Matici  $\mathbf{Q}^{-1}$  je možno zapsat jako  $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \end{pmatrix}$ , kde  $\mathbf{Q}_i$   $i = 1, \dots, 4$  jsou čtvercové bloky. Po roznásobení vyjde

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_0 & \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{Q}_4 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_0 & \mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_4 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \mathbf{Q}_1 & \mathbf{T}_1 \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{T}_2 \mathbf{Q}_3 & \mathbf{T}_2 \mathbf{Q}_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Z rovnosti prvních sloupců vyplyne

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= -\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{Q}_3 &= -\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{Q}_4 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_0 \end{aligned}$$

což dosazeno do druhých sloupců (B.9) a maticově zapsáno dá

$$-\mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \\ \mathbf{Q}_4 \mathbf{A}_2^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{A}_0 - \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \\ \mathbf{Q}_4 \mathbf{A}_2^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{A}_1 = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_4 \end{pmatrix}$$

Po dosazení  $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{A}_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \\ \mathbf{Q}_4 \mathbf{A}_2^{-1} \end{pmatrix}$ , a po vynásobení maticí  $\mathbf{T}$  zleva vyjde

$$-\mathbf{Y}\mathbf{A}_0 - \mathbf{T}\mathbf{Y}\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{Y}\mathbf{A}_2$$

Důkaz pro obecné  $l$  se povede analogicky, klíčovým krokem důkazu bude analogicky jako výše rozepsání označení  $\mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2 \ \dots \ \mathbf{Q}_l)$ , kde  $\mathbf{Q}_i$   $i = 1, \dots, l$  jsou sloupcové bloky.  $\square$

## INVERZE MATICOVÉHO POLYNOMU

Budeme nyní i nadále předpokládat, že  $\mathbf{A}_l$  je regulární. Pak podle (Gohberg et al., 1982) pro inverzi maticového polynomu platí

$$(\mathbf{L}(\lambda))^{-1} = \mathbf{X}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{Y} \quad (\text{B.10})$$

Je-li  $\mathbf{T}$  diagonální ( $\mathbf{T} = \text{diag}(\lambda_i)$ ), tzn. vlastní čísla  $\lambda_i$  jsou všechna jednoduchá, bude

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \right)$$

a podle pravidel o maticovém násobení je možno rovnici (B.10) rozepsat

$$(\mathbf{L}(\lambda))^{-1} = \sum_{j=1}^{ln} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \mathbf{x}_j \mathbf{y}_j^T \quad (\text{B.11})$$

kde  $\mathbf{x}_j$  jsou sloupce  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{y}_j^T$  jsou řádky  $\mathbf{Y}$ .

S ohledem na řešenou úlohu je možno se omezit na případ, kdy jsou všechny  $\mathbf{A}_i$  symetrické a  $\mathbf{T}$  diagonální a regulární s vesměs různými prvky.  $\mathbf{Y}$  je definovaná podmínkami (B.6). Je třeba ukázat, existuje matice  $\mathbf{D}$  taková, že  $\mathbf{Y}^T \mathbf{D} = \mathbf{X}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{0}^T &= \left( \sum \mathbf{A}_i \mathbf{Y}^T \mathbf{D} \mathbf{T}^i \right)^T \\ &= \sum \mathbf{T}^i \mathbf{D} \mathbf{Y} \mathbf{A}_i \\ &= \sum \mathbf{D}^T \mathbf{T}^i \mathbf{D} \mathbf{Y} \mathbf{A}_i = \sum \mathbf{T}^i \mathbf{Y} \mathbf{A}_i \end{aligned}$$

Symbol  $\mathbf{D}^T$  znamená  $i$ -násobnou transpozici. Poslední rovnice (viz (B.7)) implikuje symetrii  $\mathbf{D}$  či vztah  $\mathbf{D}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{D}$ . Pro jednotlivé prvky  $d_{ij}$  z toho plyne, že  $d_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \frac{t_i}{t_j} \neq 1$ .

To znamená, že má-li  $\mathbf{T}$  své diagonální členy navzájem různé, bude  $\mathbf{D}$  diagonální a regulární. K tomuto výsledku je možno dojít i jinou úvahou: Za uvedených předpokladů třetí člen Jordanovy trojice tvoří levé vlastní vektory polynomu. Pro symetrické matice  $\mathbf{A}_j$  pravé jsou vlastní vektory zároveň levými a naopak. Nutně se tedy sloupce  $\mathbf{Y}^T$  a  $\mathbf{X}$  liší jen násobnou konstantou, což je jinými slovy požadavek na diagonalitu  $\mathbf{D}$ .

Za uvedených předpokladů je tedy možno nalézt takové (pravé) vlastní vektory  $\mathbf{X}$ , že  $(\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{X}^T)$  bude Jordanova trojice. Podmínky (B.6) je možno psát

$$\mathbf{X}\mathbf{T}^i\mathbf{Y} = 0 \quad i = 0, \dots, l-1 \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{A}_l \mathbf{X} \mathbf{T}^{l-1} \mathbf{Y} = \mathbf{I} \quad (\text{B.13})$$

## APLIKACE

Budiž  $l = 2$ ,  $\mathbf{A}_i$  reálné, symetrické a buď  $\mathbf{A}_2$  regulární,  $\mathbf{T}$  diagonální a regulární s navzájem různými prvky.

Pro výpočet rozkladu inverze polynomu  $\mathbf{L}(\lambda)^{-1}$  je možno postupovat následovně:

1. Prove se řešení lineárního problému vlastních čísel s linearizační maticí. Výsledkem bude dvojice matic  $(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{T}})$ .
2. Namísto výpočtu levých vlastních vektorů je možno hledat matici  $\mathbf{D}$ , pro níž  $\mathbf{Y}^T = \widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{D}$ . Z předpokladů je známo, že bude existovat a že bude diagonální.

Podle (B.6) bude

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{X}}^T \\ \mathbf{A}_2\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{T}\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{X}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Dosazením  $\Delta = \widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{D}$  do (B.14) přejde rovnice do tvaru

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \mathbf{A}_2\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{T} \end{pmatrix} \Delta^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Neboť  $(\Delta)_{ij} = x_{ij}d_j$  a hodnoty  $x_{ij}$  jsou známy, postačí řešit soustavu (B.15) pouze pro jeden sloupec matice  $\Delta$  a odpovídající sloupec pravé strany. Volba takového sloupce záleží na rozložení nulových prvků v řádcích matice  $\widetilde{\mathbf{X}}$ .

Diagonální prvky matice  $\mathbf{D}$  se vypočtou prostým podělením hodnotami vybraného řádku matice  $\widetilde{\mathbf{X}}$  (prvek po prvku), tedy  $d_{ii} = \Delta_{ji}/x_{ij}$  pokud se použil k výpočtu sloupec  $j$ .

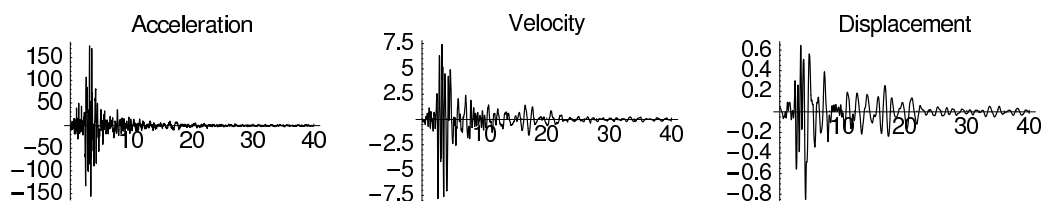
Nakonec je možno dosadit  $\mathbf{X} = \widetilde{\mathbf{X}}\sqrt{\mathbf{D}}$ , tím se z dalšího matice  $\mathbf{D}$  vyloučí.

3. Hledané matice  $\mathbf{S}_l$  pak je pak možno vypočíst podle (B.3), kde za  $\mathbf{x}_j$  se berou sloupce matice  $\mathbf{X}$ .

## Příloha C

V této příloze uvedeme příklady analýzy několika (víceméně náhodně) vybraných sesimogramů. Jde o vzorek z souboru čítajícího zhruba sto analýz.

```
CORRECTED RECORD of SIERRA MADRE EARTHQUAKE JUNE 28, 1991 07:43 PDT
ORIGIN(CIT): 06/28/91, 14:43:54.5 GMT!
RECORDED at ALTADENA - EATON CANYON PARK1
34.177N, 118.096W SMA-1 S/N 0758!
CHAN 1: 90 DEG CHAN 2: UP CHAN 3: 0 DEG
1
DT= .020 SEC UNITS: CM/SEC/SEC, CM/SEC, CM
file:/cdrom/seizm.dat/s_madre/altadena.v2
```

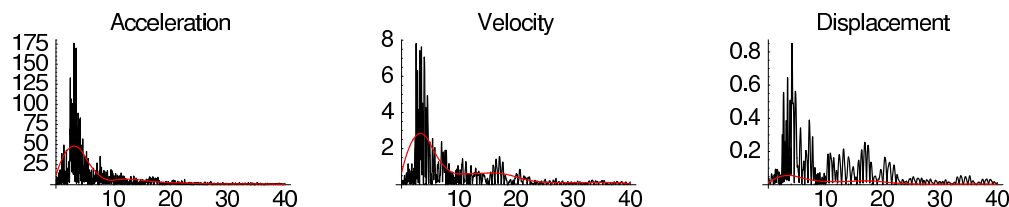


Spline nodes :{-1, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45}

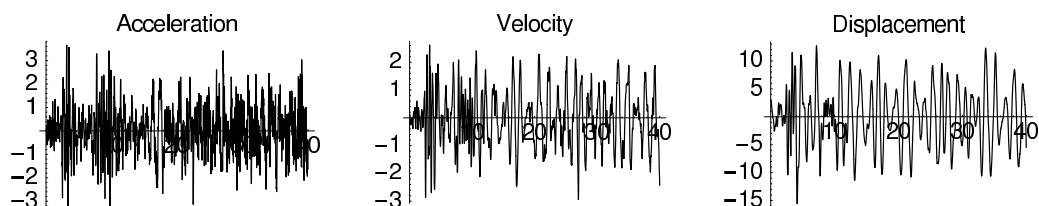
coefs. B-spl for acceleration:  
{194.156, 12.4283, 31.0308, 12.221, 8.00441, 3.93479, 4.11706, 3.81548}

coefs. B-spl for velocity:  
{11.8977, 2.45973, 2.47984, 2.84459, 0.730016, 0.426276, 0.505159, 0.52812}

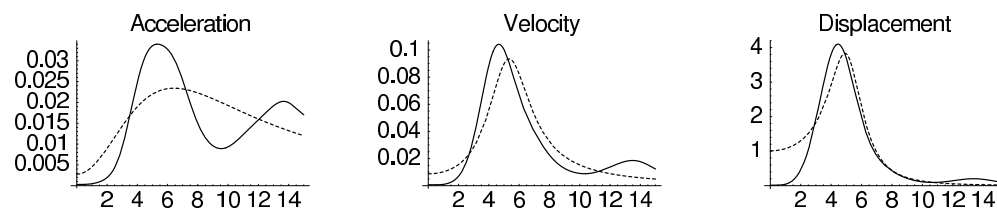
coefs. B-spl for displacement:  
{11.8977, 2.45973, 2.47984, 2.84459, 0.730016, 0.426276, 0.505159, 0.52812}



Stationary part



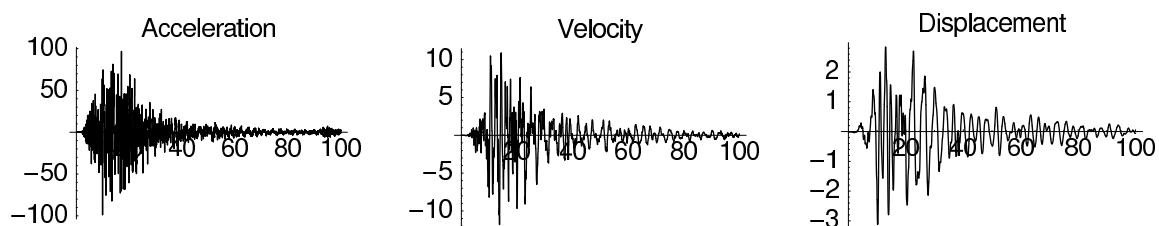
Spectral density



Continuous ARMA(2,1) coefficients

```
Acceleration: {α1, α0, β1, σ}={12.7396, 44.0136, -0.825991, 5.8172}
Velocity : {α1, α0, β1, σ}={3.45988, 29.9831, -0.328801, 7.02708}
Displacement: {α1, α0, β1, σ}={2.82179, 28.0879, -0.00079686, 70.7323}
```

CORRECTED RECORD of BIG BEAR EARTHQUAKE JUNE 28, 1992 08:05 PDT  
 ORIGIN(USGS): 06/28/92, 15:05:30.5 UTC  
 RECORDED at SAN BERNARDINO - E & HOSPITALITY, 34.065N, 117.292W SSA-1 S/N 0557  
 CHAN 3: 180 DEG  
 HYPOCENTER 34.201N, 116.826W, H=7KM. ML=6.5(CIT),MS=6.6(NEIC),MW=6.4(CIT)  
 DT=0.01 SEC UNITS: CM/SEC/SEC, CM/SEC, CM

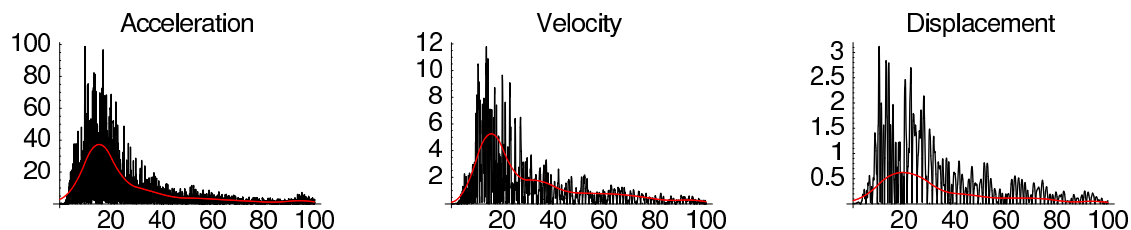


Spline nodes :{-10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110}

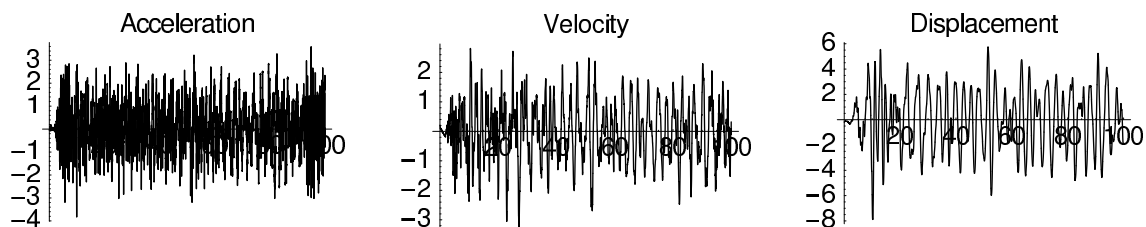
coefs. B-spl for acceleration:  
 {46.7287, 373.145, 103.36, 67.0732, 30.4195, 28.7341, 20.3233, 13.8094, 7.10955, 20.396}

coefs. B-spl for velocity:  
 {2.2148, 55.1819, 14.5608, 15.284, 7.05867, 6.59088, 6.25365, 4.42341, 1.91791, 2.79574}

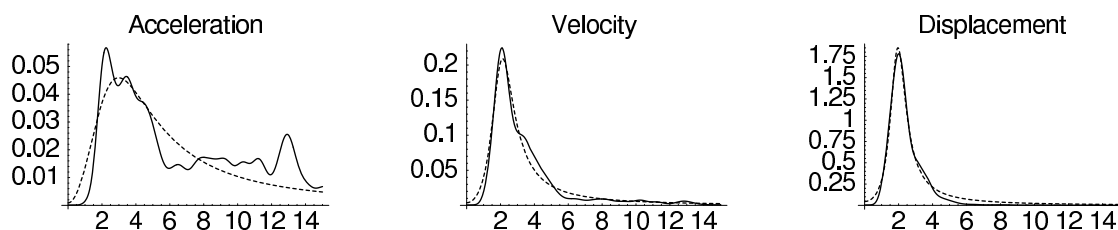
coefs. B-spl for displacement:  
 {2.2148, 55.1819, 14.5608, 15.284, 7.05867, 6.59088, 6.25365, 4.42341, 1.91791, 2.79574}



Stationary part



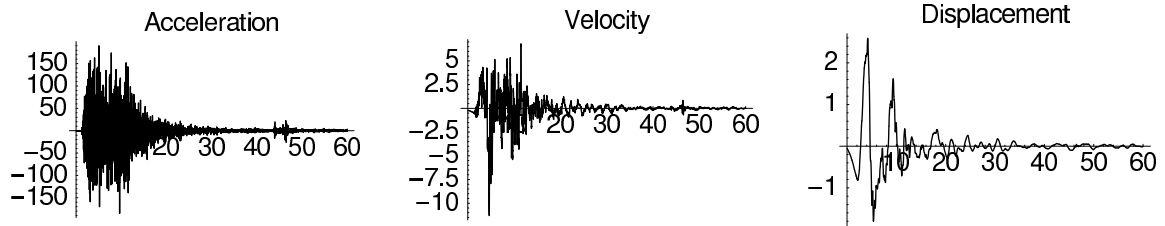
Spectral density



Continuous ARMA(2,1) coefficients

Acceleration:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{4.93828, 8.9876, -3.91899, 0.674337\}$   
 Velocity :  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{1.62674, 4.56095, -2.60894, 0.703085\}$   
 Displacement:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{1.12688, 3.89817, -1.77384, 2.08269\}$

CORRECTED RECORD of BIG BEAR EARTHQUAKE JUNE 28, 1992 08:05 PDT  
 ORIGIN(USGS): 06/28/92, 15:05:30.5 UTC  
 RECORDED at BIG BEAR LAKE - CIVIC CENTER GROUNDS, 34.238N, 116.935W DSA-1 S/N 0302  
 CHAN 2: UP  
 HYPOCENTER 34.201N, 116.826W, H=7KM. ML=6.5(CIT), MS=6.6(NEIC), MW=6.4(CIT)  
 DT=0.01 SEC UNITS: CM/SEC/SEC, CM/SEC, CM

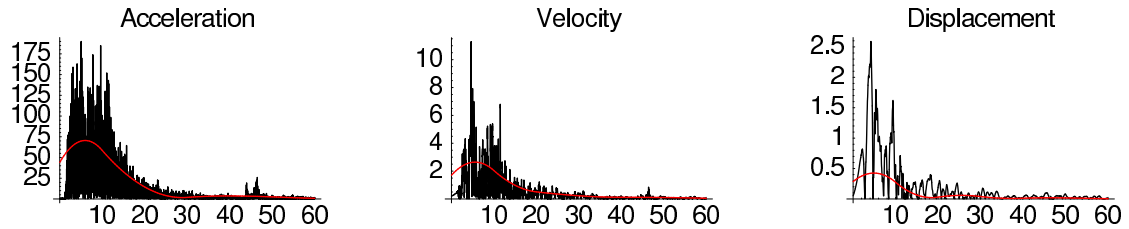


Spline nodes :{-10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70}

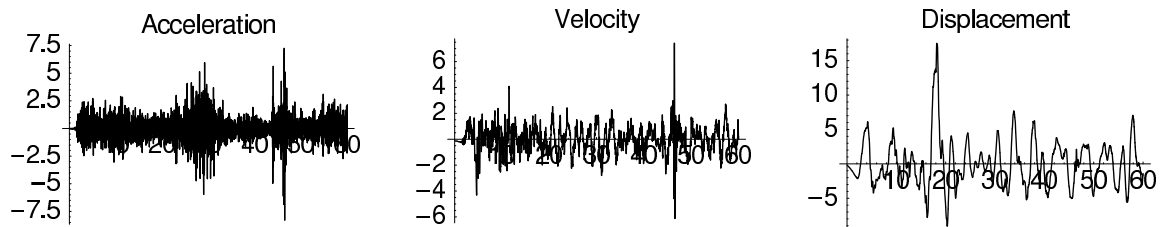
coefs. B-spl for acceleration:  
 {573.78, 188.254, 0.299402, 24.4503, 23.0035, 9.95232}

coefs. B-spl for velocity:  
 {26.3988, 5.31947, 2.61405, 0.972214, 0.926842, 0.722592}

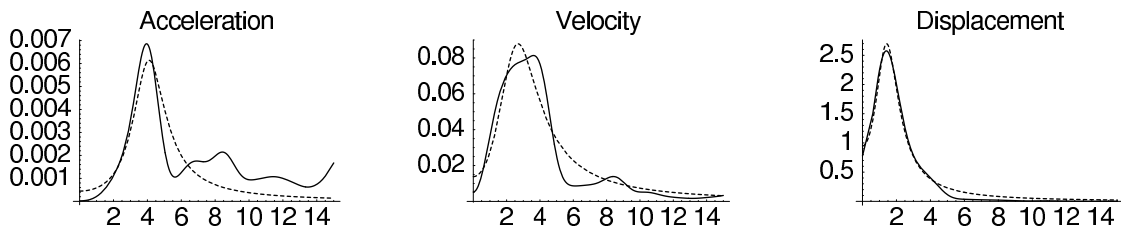
coefs. B-spl for displacement:  
 {26.3988, 5.31947, 2.61405, 0.972214, 0.926842, 0.722592}



Stationary part



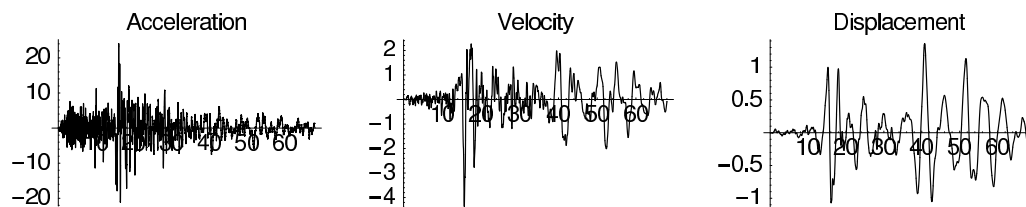
Spectral density



Continuous ARMA(2,1) coefficients

Acceleration:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{2.36557, 17.4593, -0.440174, 0.925294\}$   
 Velocity :  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{3.01176, 7.85411, 0.895417, 2.31487\}$   
 Displacement:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{1.69114, 2.51976, -0.917327, 6.15045\}$

CORRECTED RECORD of OFFSHORE EUREKA EARTHQUAKE OF 1 SEP 1994  
 ORIGIN(BRK): 09/01/94, 15:15:52.3 GMT  
 RECORDED at EUREKA - HUMBOLDT BAY BRIDGE,  
 40.822N, 124.169W SSA-2 S/N 0851 ( 3 CHNS OF 6 AT STA)  
 CHAN 3: 90 DEG  
 HYPOCENTER 40.424N, 125.844W, H=25KM ML=6.8 (BRK); MW=7.2 (NEIC)  
 DT=0.01 SEC UNITS: CM/SEC/SEC, CM/SEC, CM  
 file: /cdrom/seizm.dat/eureka.s94/abutment.v2



Spline nodes :{-1, 0, 1, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 75}

coefs. B-spl for acceleration:

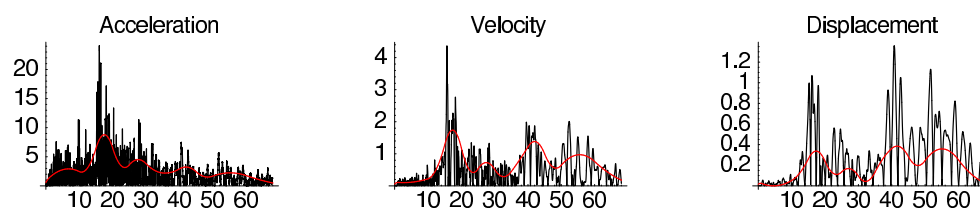
{3.14035, 14.2452, 8.36839, 42.1548, 7.3114, 20.0915, 8.95281, 7.89153, 14.2, 5.74743, 17.4077, 5.0309}

coefs. B-spl for velocity:

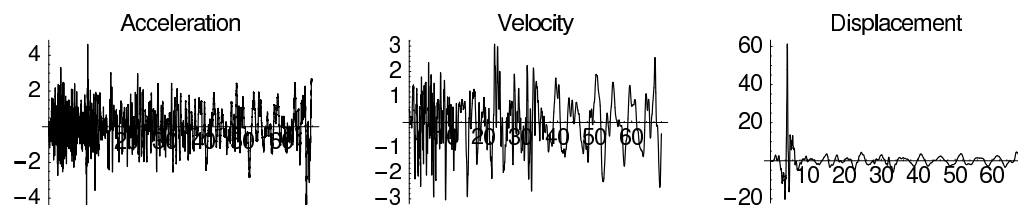
{0.317835, 0.294243, 1.47682, 8.73823,  
 0.488241, 3.62351, 0.379114, 3.09881, 6.37039, 1.82778, 8.0127, 1.81718}

coefs. B-spl for displacement:

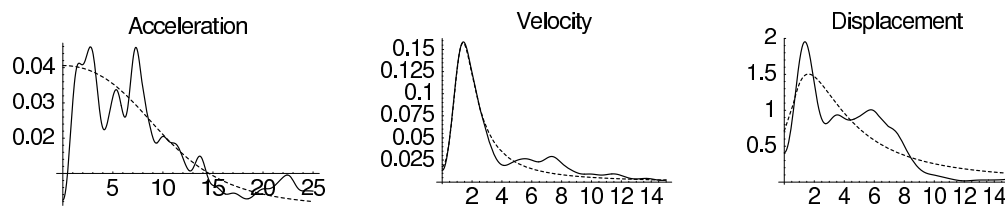
{0.317835, 0.294243, 1.47682, 8.73823,  
 0.488241, 3.62351, 0.379114, 3.09881, 6.37039, 1.82778, 8.0127, 1.81718}



Stationary part



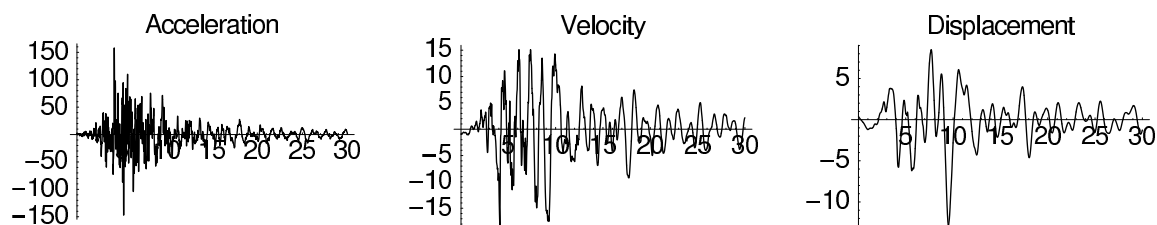
Spectral density



Continuous ARMA(2,1) coefficients

Acceleration:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{19.5145, 141.769, 0.016193, 71.5993\}$   
 Velocity :  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{1.90287, 2.06913, -2.66401, 0.686908\}$   
 Displacement:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{4.62041, 3.58493, -1.78521, 7.58152\}$

CORRECTED RECORD of SANTA CRUZ MTNS (LOMA PRIETA) EARTHQUAKE OCTOBER 17, 1989 17:04 PDT  
 ORIGIN(BRK): ORIGIN(USGS): 10/18/89, 00:04:02.2 GMT  
 RECORDED at AGNEW - AGNEWS STATE HOSPITAL, 37.397N, 121.952W SMA-1 S/N 1589  
 CHAN 1: 90 DEG  
 HYPOCENTER 37.037N, 121.883W, H=18KM. ML=7.0(BRK). MS=7.1(NEIS)  
 DT=0.01 SEC UNITS: CM/SEC/SEC, CM/SEC, CM  
 file:/cdrom/seizm.dat/eureka.s94/agnew.v2

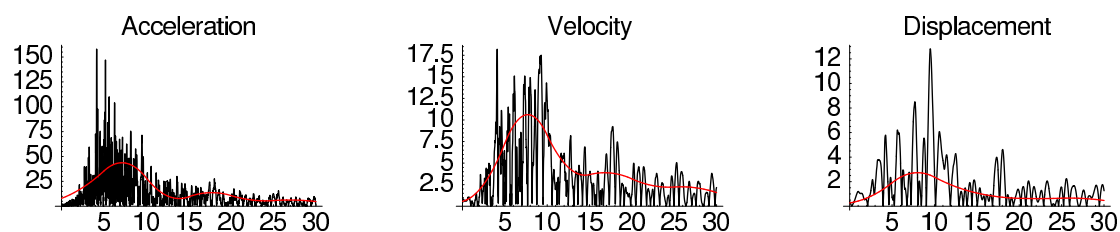


Spline nodes :{-5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40}

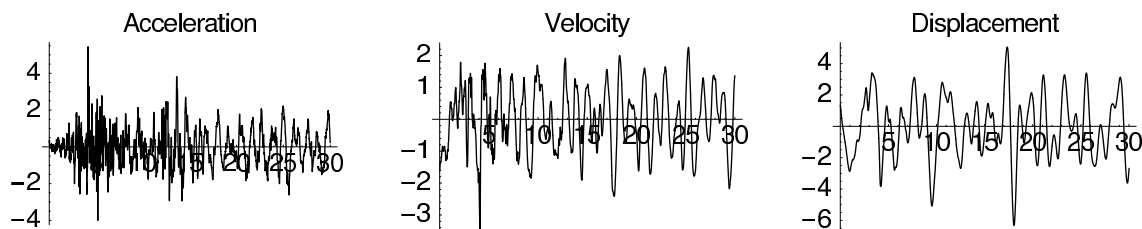
coefs. B-spl for acceleration:  
 {61.9623, 214.364, 6.94657, 67.0245, 16.5765, 36.9877}

coefs. B-spl for velocity:  
 {4.79294, 56.3625, 12.8272, 17.966, 8.70456, 13.3316}

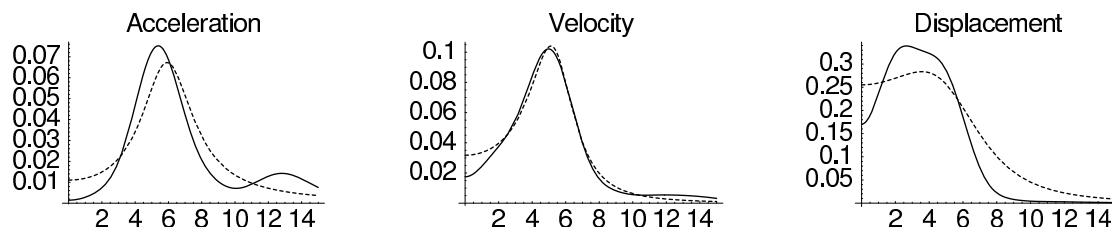
coefs. B-spl for displacement:  
 {4.79294, 56.3625, 12.8272, 17.966, 8.70456, 13.3316}



Stationary part



Spectral density

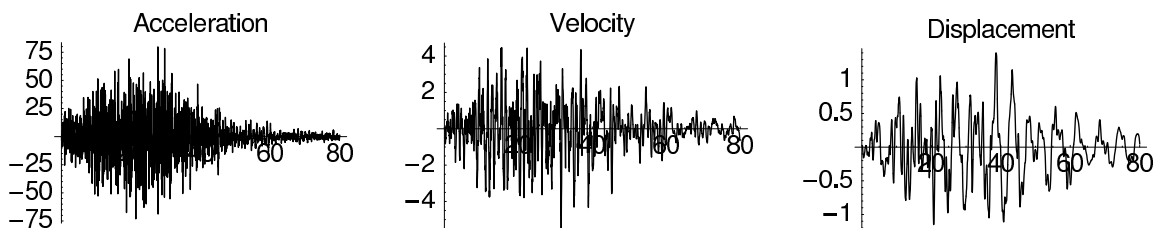


Continuous ARMA(2,1) coefficients

Acceleration:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{3.83594, 38.2856, -0.183714, 10.0899\}$   
 Velocity :  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{3.31476, 31.4383, 0.0414563, 14.0461\}$   
 Displacement:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{7.40733, 40.126, 0.000380996, 50.8087\}$



CORRECTED RECORD of LANDERS EARTHQUAKE JUNE 28, 1992 04:58 PDT1  
 ORIGIN(USGS): 06/28/92, 11:57:34.1 UTC  
 RECORDED at HEMET - STETSON AVE FIRE STATION/  
 33.729N, 116.979W SMA-1 S/N 2572!  
 CHAN 3: 0 DEG  
 HYPOCENTER(USGS): 34.217N,116.433W, H=9KM. MS=7.5 (NEIC), MW=7.4 (CIT) 0  
 DT= .020 SEC UNITS: CM/SEC/SEC, CM/SEC, CM  
 file:/home/cyril/scilab/orig/Landers/hemet.v2

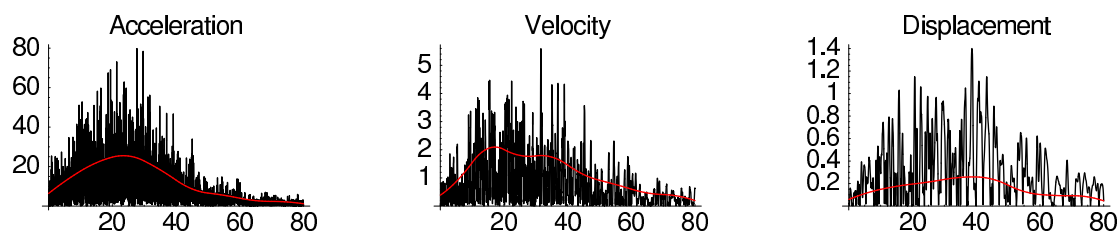


Spline nodes :{-10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90}

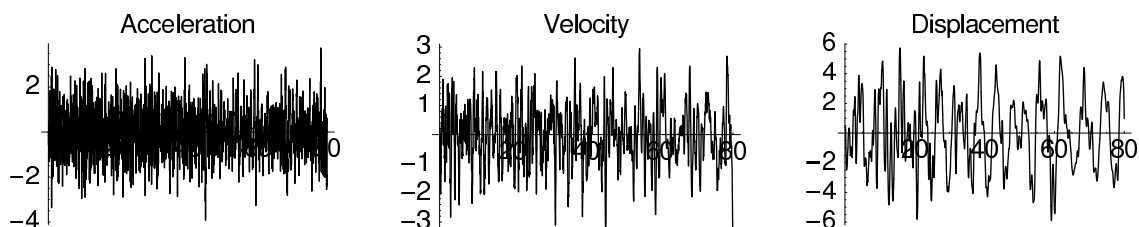
coefs. B-spl for acceleration:  
 {100.388, 177.715, 211.408, 147.387, 59.3702, 44.2702, 18.5547, 18.6487}

coefs. B-spl for velocity:  
 {6.08657, 18.225, 13.4352, 14.655, 8.32479, 6.11489, 3.37636, 3.08632}

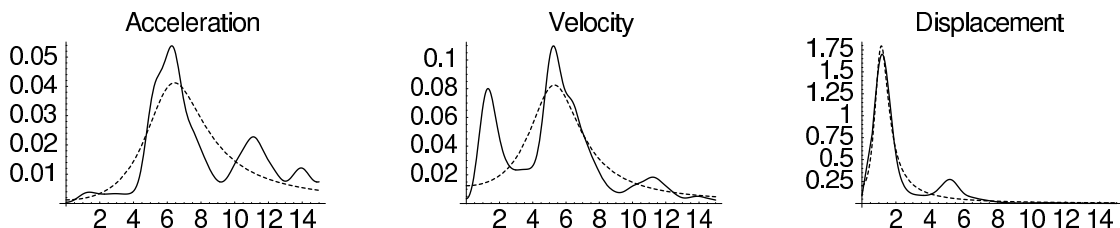
coefs. B-spl for displacement:  
 {6.08657, 18.225, 13.4352, 14.655, 8.32479, 6.11489, 3.37636, 3.08632}



Stationary part



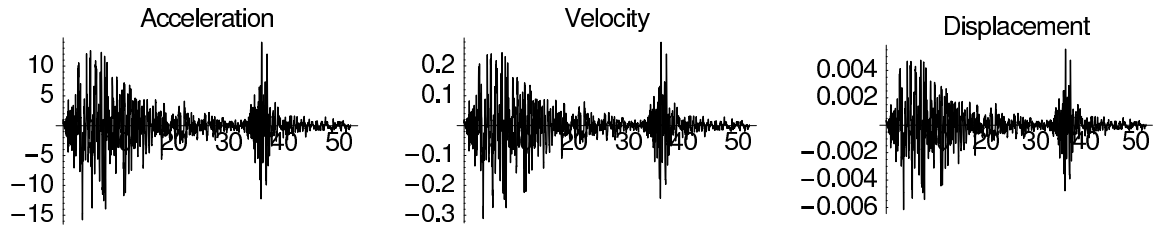
Spectral density



Continuous ARMA(2,1) coefficients

Acceleration:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{4.40308, 41.9793, 0.584356, 3.70575\}$   
 Velocity :  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{3.82461, 30.4639, 0.265779, 8.50774\}$   
 Displacement:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{1.01779, 1.38675, -2.00736, 1.56511\}$

CORRECTED RECORD of KOCAELI (TURKEY) 17. 8. 1999 01:39  
 ORIGIN(BRK): 08/17/99, 00:01:39.0 GMT  
 RECORDED at Izmit-Meteoroloji Istasyonu 40.790N 29.960E SMA-1  
 CHAN 1: 0 DEG  
 HYPOCENTER 40.702N 29.987E MB=6.3 MS=7.8 Epicentral Distance 39km  
 DT=0.01 SEC UNITS: CM/SEC/SEC, CM/SEC, CM  
 file:/cdrom/cor/001231[XYZ]A.COR

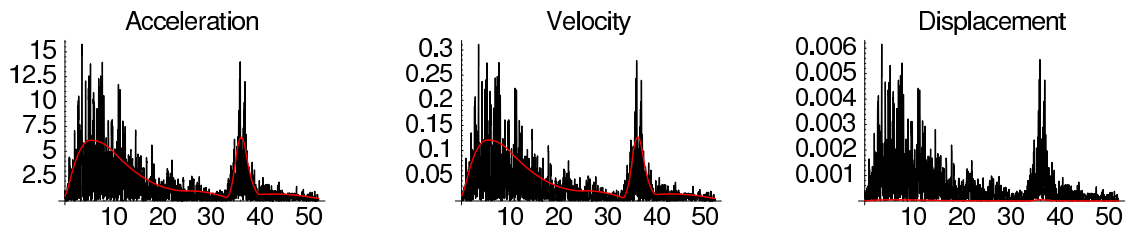


Spline nodes :{-1, 1, 5, 10, 25, 33, 35, 37, 40, 50, 60}

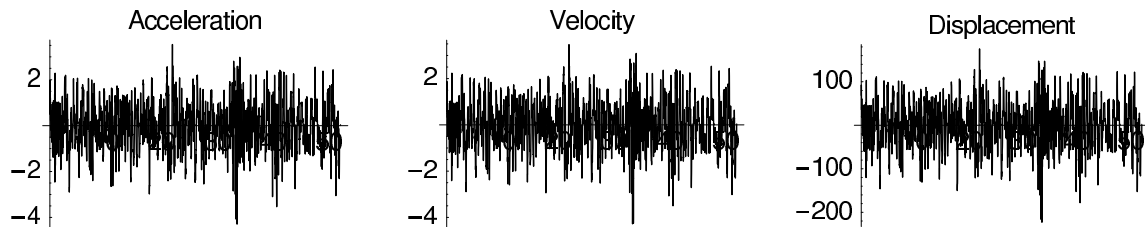
coefs. B-spl for acceleration:  
 {17.1454, 39.0028, 7.06624, 6.77938, 0.58919, 14.831, 2.35702, 4.88237}

coefs. B-spl for velocity:  
 {0.33884, 0.77446, 0.137606, 0.136293, 0.00965496, 0.293387, 0.0467887, 0.0970951}

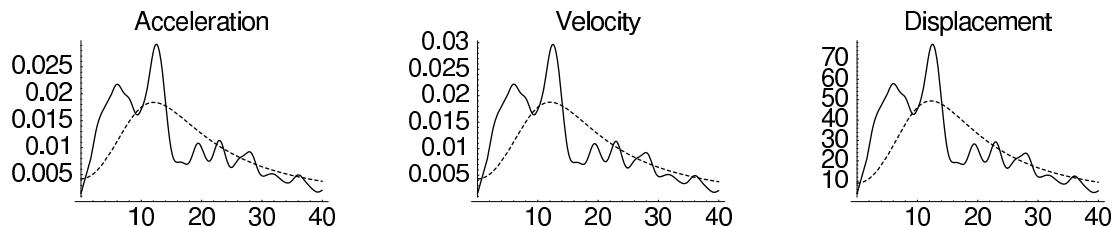
coefs. B-spl for displacement:  
 {0.33884, 0.77446, 0.137606, 0.136293, 0.00965496, 0.293387, 0.0467887, 0.0970951}



Stationary part



Spectral density



Continuous ARMA(2,1) coefficients

Acceleration:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{19.4205, 165.377, -0.231224, 26.9796\}$   
 Velocity :  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{19.1373, 165.484, -0.22824, 27.1674\}$   
 Displacement:  $\{\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \sigma\} = \{18.4916, 165.585, -0.248326, 1249.04\}$